

**Die Struktur der eichinvarianten
Elektron-Photon-Amplitude
und die Prüfung der Quantenelektrodynamik
durch Compton-Streuung und Paarvernichtung**

Gerd Tomberger

München

1970

Well - erhm - anyhow...

Julian "Cannonball" Adderley



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Meinen Eltern

Die Struktur der eichinvarianten Elektron-Photon-Amplitude
und die Prüfung der Quantenelektrodynamik
durch Compton-Streuung und Paarvernichtung.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von

Gerd Tomberger

aus Wien

1969



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Salecker .

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Bross

Tag der mündlichen Prüfung: **21.10.1970**

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
1	Einleitung
2	Abänderungen der QED
2.1	Allgemeine Betrachtungen
2.2	Forderungen an die Formfaktoren und Modelle
2.3	Eichinvarianz und Abänderungen des Elektronenpropagators
2.4	Chang-Mani-Gleichungen
2.5	Die Kroll-Ableitung und die allgemeine Lösung der Chang-Mani-Gleichungen
3	Die Elektron-Photon-Amplitude
3.1	Die allgemeine eichinvariante Elektron-Photon-Amplitude
3.2	Der Beitrag der Off-Shell-Terme des Propagators zum Matricelement
3.3	Der "wesentliche" Ein-Photon-Vertex
3.4	Die Off-Shell-Terme des Ein-Photon-Vertex
3.5	Der in $\hat{W}_1$ lineare Beitrag zur Amplitude
4	Durchrechnung zweier Beispiele
4.1	Die "wesentlichen" Vertizes und die Amplituden
4.2	Wirkungsquerschnitte
4.3	Vergleich mit Experimenten und Diskussion
5	Zusammenfassung

Anhänge:

A 1	Spuren	39
A 2	Wirkungsquerschnitte für Compton-Streuung	42
A 2.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt	42
A 2.2	Totaler Wirkungsquerschnitt	44
A 3	Wirkungsquerschnitte für Paarvernichtung in zwei γ - Quanten	45
A 3.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem	45
A 3.2	Totaler Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem	48
A 3.3	Umrechnung ins Ruhssystem des Elektrons	49
A 4	Niederenergieexperimente: Gegenwärtiger Stand	52
6	Literaturverzeichnis	53

1. Einleitung

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist die umfassendste und erfolgreichste Theorie der Physik. Obwohl ihre Gleichungen bisher nur näherungsweise gelöst werden können, beschreibt sie alle bekannten elektromagnetischen Wechselwirkungen von Teilchen in qualitativer und quantitativer Übereinstimmung mit dem Experiment, soweit diese keine starke Wechselwirkung haben, oder dieselbe vernachlässigt oder gar berücksichtigt werden kann.

Besonders eindrucksvoll ist die Übereinstimmung bei Präzisionsmessungen wie Lamb'sche Verschiebung, anomales Moment des Elektrons und Myons, Feinstruktur des Positroniums und Myoniums und Hyperfeinstruktur des Wasserstoffs einerseits [1]^{1) 2)}, andererseits bei Hochenergieexperimenten wie Elektron-Elektron-Streuung mit gegenläufigen Strahlen und Weitwinkel-Paarerzeugung von Elektronen und Myonen [2].

Jedoch ist die Theorie nicht frei von inneren Schwierigkeiten, die sich durch das Auftreten von divergenten Größen äußern. Die Beiträge der elektromagnetischen Wechselwirkung z.B. zu Masse und Ladung des Elektrons ergeben sich in jeder Näherung als unendlich. Diese Schwierigkeit wird umgangen, da die in den Feldgleichungen auftretenden Größen renormiert werden müssen, und man kann alle übrigen meßbaren Größen in prinzipiell beliebig hoher Näherung berechnen, sie ist jedoch damit im Grunde nicht beseitigt. Denn z.B. die elektromagnetische Masse ist zwar nicht beobachtbar, wenn die restliche "mechanische" Masse unbekannt ist, aber die Massenunterschiede derjenigen stark wechselwirkenden Teilchen, die sich offenbar nur durch die

1) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis S. 53

2) Ein Überblick über den gegenwärtigen Stand von Theorie und Experiment wird im Anhang 4 gegeben.

Ladung unterscheiden ($p-n$, $\pi^+-\pi^0$, K^+-K^0 usw.) müßten elektrodynamisch erklärbar sein. Diese Massenunterschiede liegen auch in allen Fällen in der Größenordnung einiger Elektronenmassen. Allerdings spielt bei ihrer Berechnung auch die starke Wechselwirkung eine Rolle.

Diese Schwierigkeiten führt man anschaulich zum Teil darauf zurück, daß z.B. das Elektron in der Quantenelektrodynamik als Punktteilchen eingeführt wird. Man hat daher schon bald nach der Aufstellung der quantenelektrodynamischen Gleichungen vor nunmehr 40 Jahren versucht, diese durch Nichtlokalitäten abzuändern, die intuitiv z.B. einem ausgedehnten Elektron entsprechen sollen.¹⁾

Andererseits ist klar, daß die Quantenelektrodynamik bei der Beschreibung von Prozessen mit hohen Energien schließlich versagen muß, da sich dort Wechselwirkungen mit anderen, stark oder schwach wechselwirkenden Teilchen bemerkbar machen werden. Diese Teilchen können virtuell auch zu Prozessen beitragen, bei denen im Anfangs- und Endzustand nur Elektronen oder Myonen, und Photonen vorhanden sind.²⁾

Aus diesen Gründen hat man sich auf den Standpunkt gestellt, daß die nicht lokalen Formfaktoren, durch deren Einführung man z.B. die Feynmanregeln zur Aufstellung von Amplituden in der OED abändern kann, durch Experimente zu ermitteln seien [5, 6].

In den letzten Jahren sind zur Messung bzw. Einschränkung dieser Formfaktoren durch Hochenergieexperimente große Anstrengungen unternommen worden [2].

1) In den zusammenfassenden Berichten von Blochinzew [3] und Kirzhnits [4] über nicht lokale Quantenfeldtheorien findet man Verweise auf die umfangreiche Originalliteratur.

2) Z.B. spielt bei der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffs schon die Struktur des Protons eine Rolle. Auch beim anomalen Moment des Myons könnte bald eine experimentelle Genauigkeit erreicht werden, bei der sich Einflüsse der starken und schwachen Wechselwirkungen bemerkbar machen. Siehe hierzu Anhang 4 und die dort zitierte Literatur.

In dieser Arbeit wird untersucht, welche Folgerungen sich aus der Eichinvarianz für die Lorentz-invariante Elektron-Photon-Amplitude in einer ansonsten beliebig abgeänderten QED und damit für die Messung der Formfaktoren durch Compton-Streuung oder Zwei-Quanten-Paarvernichtung [7] (auch Paarerzeugung und Bremsstrahlung im äußeren Feld [6]) ergeben.

Insbesondere die Paarvernichtung wird jetzt besonders interessant, da dieser Prozeß mit Hilfe von gegenläufigen Strahlen (colliding beams) bei sehr hohen Impulsüberträgen gemessen werden kann.¹⁾

1) Berichte über vorhandene und geplante Maschinen dieser Art findet man in [8, 9].

2. Abänderungen der QED

2.1 Allgemeine Betrachtungen

Man kann die QED abändern, z.B. indem man den Photonen- und den Elektronenpropagator ¹⁾ und den Vertexoperator der üblichen Feynmanregeln ²⁾ [10] im Impulsraum mit Formfaktoren versieht, die in invarianter Weise von den virtuellen Impulsen abhängen [5, 6, 13, 7] ³⁾:

$$(1a) \quad D(k^2) = \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} F_D(k^2)$$

$$(1b) \quad S_m(q) = \frac{i\cancel{q} - m}{q^2 + m^2} \rightarrow \frac{i\cancel{q} F_e^1(q^2 + m^2) - m F_e^2(q^2 + m^2)}{q^2 + m^2}$$

$$(1c) \quad \Gamma_\mu(k^2, p^2 + m^2, q^2 + m^2) = i\gamma_\mu \rightarrow i\gamma_\mu^* F_V(k^2, p^2 + m^2, q^2 + m^2)$$

Für den Vertexoperator sind noch allgemeinere Abänderungen möglich, die weiter unten ausführlich diskutiert werden. Die Ableitung der obigen Ausdrücke aus einer nicht lokalen Lagrangefunktion ist nicht ganz geklärt [14] ⁴⁾

Man kann diese abgeänderten Größen doppelt interpretieren, zum einen nämlich, daß die Funktionen F ein pauschaler Ausdruck für die anderen Wechselwirkungen sind, die sich bei hohen Energien in quantenelektrodynamischen Prozessen bemerkbar machen müssen. Z.B. ist bekannt, daß in der elastischen Elektron-Proton-Streuung die starke Wechselwirkung des Protons durch folgenden Vertexoperator beschrieben werden kann:

$$\Gamma_\mu^* = i\gamma_\mu F_1^*(k^2) + \frac{i\gamma_\mu}{4m_p} [k, \gamma_\mu] F_2^*(k^2),$$

wobei die Funktionen F im raumartigen Bereich ($k^2 > 0$) insbesondere für F_2^0 bis zu hohen Viererimpulsüberträgen

1) bzw. Myonenpropagator

2) d.h. alle Größen sind in niedrigster Näherung der Störungstheorie betrachtet.

3) Bezeichnungen: $q^2 = g_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = q_i^2 - q_0^2$ (Summationskonvention, $\mu = 0, 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$); $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$; $\cancel{q} = \gamma_\mu q^\mu$; $\{\delta_\mu^\mu, \delta_\nu^\nu\} = 2g_{\mu\nu}$; $\{A, B\} = AB + BA$; $[A, B] = AB - BA$,

Maßsystem: $\hbar = c = 1$, $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137}$

4) siehe dagegen [4]

($k^2 = 25 \text{ [GeV/c]}^2$) ausgemessen sind [1]. Dabei ist zu beachten, daß der Einfluß der schwachen Wechselwirkung zur Verletzung der C-, P- und vermutlich auch der T-Invarianz führt.

Zum anderen kann man sich auf den Standpunkt stellen, daß die Formfaktoren von einer fundamentalen Abänderung der Theorie herrühren. Damit ist die eingangs angedeutete Möglichkeit gemeint, daß die Prinzipien, die der QED zugrunde liegen, wie z.B. Lorentz-Invarianz, C-, P-, und T-Invarianz, Eichinvarianz, Lokalität bzw. Mikrokausalität, Prinzipien der Quantenmechanik, wie Linearität des Zustandsraums, positive Definitheit der Metrik des Zustandsraums und Unitarität der S-Matrix, einen beschränkten Gültigkeitsbereich haben könnten, der bei Prozessen mit hohen Energien irgendwann einmal überschritten wird. Es ist zweckmäßig, die verschiedenen Möglichkeiten der Verletzung von Grundprinzipien möglichst getrennt zu untersuchen.

In dieser Arbeit nehmen wir die Prinzipien der Quantenmechanik, die Lorentz-Invarianz und die Eichinvarianz als gültig an. Unsere Aussagen gelten daher auch für den ersten Fall, in dem die Formfaktoren von der starken oder schwachen Wechselwirkung herrühren.¹⁾

2.2 Forderungen an die Formfaktoren und Modelle

Die Gültigkeit der Lorentzinvarianz haben wir durch die explizite Gestalt der Ausdrücke (1) schon berücksichtigt. Damit die Theorie für kleine Energien mit der QED übereinstimmt, müssen die Formfaktoren bei Annäherung an die Massenschale (d.h. für den Übergang zu reellen Teilchen mit $k^2 = 0, q^2 = -m^2$ bzw. $p^2 = -m^2$) hinreichend schnell

- 1) Bei der Betrachtung spezieller Beispiele werden wir der Einfachheit halber C-, P- und T-Invarianz annehmen, bei unserer allgemeinen Diskussion jedoch nicht.

gegen 1 streben. Wenn sie in einem gewissen Energiebereich nur wenig von 1 abweichen, kann man sie dort durch das erste nicht konstante Glied einer Taylorentwicklung beschreiben, also durch je einen Parameter¹⁾, und somit Aussagen machen, die von der speziellen Gestalt der Formfaktoren unabhängig sind. Bei großen Abweichungen oder bei der Berechnung von höheren Näherungen, wo über virtuelle Impulse integriert werden muß, muß jedoch eine explizite Gestalt des Formfaktors angenommen werden. In Ermangelung besserer Gesichtspunkte ist zunächst der der Einfachheit zweckmäßig. Eine einfache Möglichkeit ist z.B. der regularisierte Propagator von Feynman [11, 12] :

$$(2) \quad D(k^2) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{k^2}{\Lambda_g^2}} \right) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda_g^2}$$

$$(3) \quad S(q) = \frac{iq - m}{q^2 + m^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{q^2 + m^2}{\Lambda_e^2}} \right) = \frac{iq - m}{q^2 + m^2} - \frac{iq - m}{q^2 + m^2 + \Lambda_e^2},$$

wobei Λ_g, Λ_e Parameter mit der Dimension eines Impulses sind.

Für $\Lambda \rightarrow \infty$ ergibt sich die QED. Die abgeänderte QED (AQED) mit den Propagatoren (2), (3) hat die schöne Eigenschaft in jeder Näherung endlich zu sein (Regularisierung). Läßt man nach Berechnung der Amplituden, d.h. nach Ausführung der Integrationen über die virtuellen Impulse $\Lambda \rightarrow \infty$ gehen, so erhält man die gleichen Ergebnisse wie in der renormierten QED [15]²⁾.

Diese Eigenschaft wird jedoch durch die Verletzung von anderen physikalischen Prinzipien erkauft. Bekanntlich entspricht z.B. der Propagator (2) der Ankopplung

- 1) Beim Vertexoperator sind bei Feynman-Diagrammen der niedrigsten Näherung immer zwei Teilchen auf der Massenschale.
- 2) Bei der Behandlung von geschlossenen Elektronenschleifen bedarf es eines Kunstgriffs, damit das Ergebnis eichinvariant bleibt [15] .

eines zusätzlichen "schweren Photons" mit der Masse Λ_γ , jedoch mit negativer Energie [16, 11, 16a] oder negativer Wahrscheinlichkeit des Ein-Teilchen-Zustands [16b, 17], also indefiniter Metrik im Hilbert-Raum. Die Theorie mit Teilchen negativer Energie führt zu Widersprüchen [11]. Bei indefiniter Metrik ist die S-Matrix im allgemeinen nicht unitär. Dies ist hier anschaulich verständlich, da das schwere Photon erzeugt werden kann und daher in den Endzuständen berücksichtigt werden müßte [17a]. Neuerdings haben Lee und Wick explizit gezeigt, daß die S-Matrix unitär bleibt, wenn das schwere Photon instabil ist [17]. Dies ist dann der Fall, wenn $\Lambda_\gamma > 2m$ gilt, und das schwere Photon in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen kann.

Setzt man in (2), (3) Pluszeichen, so verlieren die Propagatoren ihre Regulatoreigenschaften. Die schweren Photonen und Elektronen sind dann als gewöhnliche Bosonen und Fermionen aufzufassen, die an Photon und Elektron gekoppelt sind. Solche Abänderungen der QED wurden von Low diskutiert [18].

Wir wollen uns hier auf den Standpunkt stellen, daß z.B. die Formfaktoren (2), (3) eins von vielen möglichen Modellen zur pauschalen Beschreibung irgend welcher Abweichungen von der QED sind. Stimmen die Experimente mit der QED¹⁾ innerhalb der Fehlergrenzen überein, so bestimmen diese eine untere Grenze für den "Abschneideimpuls", der eine obere Grenze der "Abschneidelänge" entspricht. Man sagt dann, daß die QED bis zu diesen Grenzen (im Rahmen des Modells) gültig sei. Bei den zitierten Hochenergieexperimenten hat man so Grenzen von $\Lambda > 2 \text{ GeV}/c$ oder $\frac{1}{\Lambda} < 5 \cdot 10^{-15} \text{ cm}$ erreicht. Diese Aussagen sind noch von der speziellen Gestalt der Formfaktoren unabhängig. In dieser Arbeit werden wir zunächst nur die allgemeine Gestalt der Formfaktoren wie in (1) voraussetzen und kein spezielles Modell wie etwa (2), (3) benutzen.

1) bei Berücksichtigung der Strahlungskorrekturen

2.3 Eichinvarianz und Abänderungen des Elektronenpropagators

Die Invarianz unter Eichtransformationen 1. Art:

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x) e^{-i\varphi} \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) e^{i\varphi} \end{aligned} \quad 1)$$

führt zur differentiellen Stromerhaltung. Die Invarianz unter Eichtransformationen 2. Art:

$$(5) \quad \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x) \\ \psi(x) &\rightarrow e^{-i\varphi(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{i\varphi(x)} \bar{\psi}(x) \end{aligned}$$

drückt aus, daß die Potentiale A nicht meßbar sind, sondern nur die Feldstärken. Dies hängt auch damit zusammen, daß freie Photonen die Ruhemasse 0 haben und transversal polarisiert sind.

In dieser Arbeit setzen wir die Eichinvarianz (2. Art) der Theorie voraus. Die Abänderung des Photonenpropagators (1a) steht damit nicht in Konflikt. Wir betrachten in dieser Arbeit nur Prozesse, bei denen in niedrigster Näherung keine virtuellen Photonen auftreten, und beschäftigt uns mit dem Photonenpropagator nicht weiter.

Es ist jedoch seit langem bekannt, daß eine Abänderung des Elektronenpropagators (2a) i.a. zu nicht eichinvarianten Ergebnissen führt [15]. Aus der Eichinvarianz folgt eine Beziehung zwischen dem Elektronenpropagator und dem Vertexoperator, die Ward-Takahashi-Gleichung [19, 20]. Wie Stora bemerkte, muß man daher bei einer Abänderung des Elektronenpropagators den Vertexoperator auch abändern (und umgekehrt) und zwar derart, daß die Ward-Takahashi-Gleichung bestehen bleibt (s. [6], Fußnote 6). In einer Arbeit von McClure und Drell [21] stellte sich heraus, daß dies noch nicht ausreicht, um die Eichinvarianz zu erzielen; hierzu mußte noch ein ad hoc gewählter Zwei-Photonen-Vertex (Seemövengraph) eingeführt werden, ähnlich wie in der Elektrodynamik von Spin-0-Teilchen.

1) Bezeichnungen siehe Fußnote S. 11.

Der Grund dafür ist, daß aus der Eichinvarianz noch weitere Gleichungen folgen, die Beziehungen zwischen Mehrphotonenvertizes mit verschiedenen Photonenanzahlen herstellen. Solche Gleichungen wurden von Bogoljubow und Schirkow [22], Kazes [23], Nishijima [24], Chang und Mani [25], Rivers [26], Kroll [28] und Breitenlohner [27] abgeleitet. Die Ward-Takahashi-Gleichung ist der einfachste Spezialfall; sie gibt eine Beziehung zwischen dem Ein- und dem "Null-Photonen-Vertex", dem Elektronenpropagator.

In der QED treten Mehrphotonenvertizes nur in höheren Ordnungen der Störungstheorie auf. Ändert man jedoch den Elektronenpropagator ab, so muß man i.a. Mehrphotonenvertizes mit beliebig vielen Photonen einführen, wie Kroll bemerkte [28].

Kroll betrachtete die obenerwähnten Gleichungen für eigentliche Vertizes ¹⁾, die er als Chang-Mani-Gleichungen bezeichnete. Er konstruierte mit Hilfe eines Operatorkalküls die Lösungsmannigfaltigkeit dieser Gleichungen bei weitgehend beliebig vorgegebenem Propagator.²⁾ Damit hat man alle Mehrphotonenvertizes. Sie bestehen aus zwei Anteilen, einem vom Propagator "induzierten" Vertex, und einem "wesentlichen" Vertex ³⁾ (intrinsic vertex), der vom Propagator unabhängig ist. Kroll zeigte, daß Propagatorabänderungen sich nicht bemerkbar machen, wenn keine "wesentlichen" Vertizes vorhanden sind. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Propagator für $p^2 = -m^2$ nur einen einfachen Pol hat, also auf der Massenschale des Elektrons das gleiche singuläre Verhalten wie der gewöhnliche Propagator hat, und daß das betrachtete Feynman-Diagramm keine geschlossenen Elektronenlinien enthält. D.h., jeder Propagator mit dieser Eigenschaft, der aber ansonsten ganz beliebig sein kann, liefert für solche Diagramme die gleiche Amplitude.

1) siehe Abschnitt 2.4

2) Im folgenden ist stets der Fermionenpropagator (Elektron oder Myon) gemeint.

3) siehe Abschnitt 2.5

Wie im einzelnen gezeigt werden soll, läßt sich dieses Ergebnis in gewissem Sinn auf den Fall verallgemeinern, daß auch "wesentliche" Vertizes vorhanden sind [29]. Die Propagatorabänderungen fallen nämlich zum Teil weg, zum anderen Teil können sie in die "wesentlichen" Vertizes einbezogen werden. Also kann z.B. in der niedrigsten Näherung einer abgeänderten eichinvarianten QED die Amplitude beschrieben werden durch den nicht abgeänderten Propagator, den man nach der obigen Voraussetzung als "On-Shell-Anteil" des abgeänderten Propagators bezeichnen kann, und "wesentliche" Vertizes. Man kann jedoch noch einen Schritt weitergehen [30, 29]. Betrachten wir z.B. den "wesentlichen" Ein-Photon-Vertex und bezeichnen die Terme als "Off-Shell-Anteil" welche verschwinden, wenn man den Vertexoperator zwischen reelle Elektronenzustände einschließt, also auf der Massenschale betrachtet. Es zeigt sich, daß sich auch diese "Off-Shell-Terme" zum Teil wegheben, zum anderen Teil in den "wesentlichen" Zwei-Photonen-Vertex einbezogen werden können.

In dieser Arbeit behandeln wir als wichtigstes Beispiel die Elektron-Photon-Streuamplitude ohne Abstrahlung, zu der natürlich nur die "On-Shell-Terme" des Zwei-Photonen-Vertex beitragen. Das geschilderte Verfahren läßt sich jedoch auch für beliebig viele äußere Photonen durchführen [29].

Man kann also die Amplitude für einen Prozeß in einer beliebig abgeänderten eichinvarianten QED in niedrigster Näherung beschreiben durch den unveränderten Propagator und "wesentliche" Vertizes, die keine "Off-Shell-Terme" enthalten. Die einzige einschränkende Voraussetzung war, daß der abgeänderte Elektronenpropagator den gleichen "On-Shell-Term" hat wie der unveränderte.

Dieses Ergebnis wird in den nächsten Abschnitten für das Beispiel der Elektron-Photon-Streuamplitude ausführlich hergeleitet. Schließlich werden zur Illustration zwei verschiedene Beispiele von "wesentlichen" Vertizes gewählt, und die Wirkungsquerschnitte für Compton-Streuung und Zwei-Quanten-Paarvernichtung werden hierfür berechnet.

2.4 Chang-Mani-Gleichungen

Wir gehen aus von Vakuum Erwartungswerten von zeitgeordneten Produkten von Feldoperatoren im Heisenberg-Bild, die wir uns etwa durch eine exakte Lösung von nicht lokalen Feldgleichungen gegeben denken:

$$(6) \quad G_n^1 \equiv G_n(x, y; z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | T [\psi(x) \bar{\psi}(y) A_1(z_1) \dots A_n(z_n)] | 0 \rangle, \quad n \geq 0$$

und die man auch als Green'sche Funktionen bezeichnet.¹⁾ Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall mit nur einem Operatorpaar $\psi \bar{\psi}$. Die Verallgemeinerung der folgenden Betrachtungen auf beliebig viele (m) solcher Paare (G_n^m) ist leicht durchführbar [22, 26]. Wir meinen im folgenden immer den zusammenhängenden Anteil von G_n gegeben durch

$$(7) \quad G_n^{1c}(x, y; z_1, \dots, z_n) = G_n^1(x, y; z_1, \dots, z_n) - \sum_{i=1}^n G_{n-i}^{1c}(x, y; z_{i+1}, \dots, z_n) G_y^0(z_1, \dots, z_i), \quad n \geq 0 \quad 2)$$

Dabei tragen in der Summe nur die Terme mit geradem ν bei, da sonst G_y^0 verschwindet. Ferner sind die Funktionen G_n in den Variablen $z_1, \dots, z_n$ symmetrisch und in x, y , antisymmetrisch. Das Produkt in der Summe ist entsprechend symmetrisiert zu denken, also explicit:

$$(7a) \quad \sum_{i=1}^n G_{n-i}^{1c} G_i^0 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-2i)!(2i)!} G_{n-i}^{1c}(x, y; z_{2i+1}, \dots, z_n) G_{2i}^0(z_1, \dots, z_{2i})$$

n/2 für n gerade

$$k = \frac{n-1}{2} \text{ für n ungerade}$$

Entsprechendes gilt im folgenden für alle Produkte von Funktionen, auch im Impulsraum, was wir jedoch der Übersichtlichkeit wegen nicht ausschreiben.

- 1) Dabei ist $\psi(x)$ der Spinorfeldoperator des Elektrons, $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) A$, $A = A^\dagger$, $A^\dagger$ hermitesch konjugiert zu A , $A_1^{\mu\nu}(z_1)$ der Feldoperator des elektromagnetischen Potentials, $|0\rangle$ das physikalische Vakuum (alles im Heisenberg-Bild).

T bezeichnet das zeitgeordnete Produkt: $T[f_1(x_1) \dots f_n(x_n)] = \sum_{j=1}^n \dots \theta(x_{i-1} - x_i) \theta(x_{i+1} - x_i) \dots T[\dots f_{i-1}(x_{i-1}) f_{i+1}(x_{i+1}) \dots] f_i(x_i) (-1)^j$
 $j = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f_i \text{ Bosonenoperator} \\ 1, & \text{Zahl der Fermionenoperatoren } f_k \text{ mit } k > i \text{ wenn } f_i \text{ Fermionenoperator.} \end{cases}$

- 2) Die Größen G_n^{1c} werden auch als uneigentliche (improper) Vertizes bezeichnet [28], s.u.

In der Störungstheorie wird die zusammenhängende Green'sche Funktion G_n^1 gegeben durch die Summe aller zusammenhängenden Feynman-Diagramme mit zwei äußeren (virtuellen) Elektronenlinien und n äußeren (virtuellen) Photonlinien.

Diese Funktionen G_n erfüllen folgende Gleichung:

$$(8) \quad \partial_n \square_n G_n(x, y; z_1, \dots, z_n) = G_{n-1}(x, y; z_1, \dots, z_{n-1}) [\delta(z_n - x) - \delta(z_n - y)], \quad n \geq 1,$$

oder nach Übergang in den Impulsraum und Abspaltung der impulserhaltenden δ -Funktion:

$$(9) \quad k_n \cdot k_n^2 G_n(q; k_1, \dots, k_n) = G_{n-1}(q + k_n; k_1, \dots, k_{n-1}) - G_{n-1}(q; k_1, \dots, k_{n-1}), \quad n \geq 1. \quad 1)$$

Hier wird schon der Zusammenhang zwischen den verschiedenen n -Photonen-Vertizes deutlich. Es ist jedoch zweckmäßiger, Vertizes einzuführen, bei denen die äußeren Photonlinien amputiert sind. Diese werden durch (ebenfalls zusammenhängende) Vakuum Erwartungswerte mit den Stromoperatoren gegeben, welche man durch $j_\mu(x) = -\square A_\mu(x)$ definieren kann:

$$(10) \quad S_n^1 \equiv S_n(x, y; z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | T [\psi(x) \bar{\psi}(y) j_1(z_1) \dots j_n(z_n) | 0] \rangle_c, \quad n \geq 0.$$

Diese Größen genügen den einfacheren Gleichungen:

$$(11) \quad \partial_n S_n(x, y; z_1, \dots, z_n) = S_{n-1}(x, y; z_1, \dots, z_{n-1}) [\delta(z_n - x) - \delta(z_n - y)], \quad n \geq 1,$$

bzw.

$$(12) \quad k_n S_n(q; k_1, \dots, k_n) = S_{n-1}(q + k_n; k_1, \dots, k_{n-1}) - S_{n-1}(q; k_1, \dots, k_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

1) q einlaufender Elektronenimpuls, $k_1, \dots, k_n$ einlaufende Photonimpulse. Der auslaufende Elektronenimpuls ist $p = q + \sum_i k_i$; G_n bzw. S_n ist symmetrisch in den Photonimpulsen. Daher ist folgende abkürzende Schreibweise verständlich, z.B. statt (12):

$$k \cdot S_n^q = S_{n-1}^{q+k} - S_{n-1}^q$$

Um die Operatoramplitude für einen Streuprozess zu erhalten, müssen auch noch die äußeren Elektronenlinien amputiert werden. Man bildet daher folgende Größen:

$$(13) \quad V_n = S_0^{-1} S_n S_0^{-1}, \quad n \geq 0$$

In diesem Produkt ist der Impulssatz impliziert, d.h., das rechte S_0^{-1} hängt vom einlaufenden Impuls q , das linke S_0^{-1} vom auslaufenden Impuls $p = q + \sum_{i=1}^n k_i$ ab: Schließt man die Größen V_n , die wir als Feynman-Amplituden bezeichnen,¹⁾ zwischen ein- und auslaufenden Elektronenzuständen ein und verjüngt die (hier unterdrückten) Tensorindizes mit den Polarisationsvektoren der Photonen, so erhalten wir die Amplitude, die auf Grund der Kreuzungssymmetrie z.B. folgende Prozesse beschreibt: Compton-Streuung, Paarerzeugung aus zwei γ -Quanten, jeweils mit Abstrahlung von $n-2$ Photonen, und Paarvernichtung in n Photonen.

Aus den Gleichungen (12) folgt mit (13):

$$(14) \quad k \cdot V_n^q = V_{n-1}^{q+k} S_0^{q+k} S_0^{-1} q - S_0^{-1} p S_0^{p-k} V_{n-1}^q, \quad n \geq 1.$$

(Bezeichnung s. Fußnote S. 12). Schließt man dies zwischen freien Elektronenzuständen $\langle p |, | q \rangle$ ein, so verschwindet die rechte Seite. Man erhält somit ein lange bekanntes Kriterium für Eichinvarianz von Amplituden mit äußeren Photonen [12].

Für die Aufstellung von Graphenregeln ist es zweckmäßig, eigentliche (proper) Vertizes einzuführen. Diese sind Ein-Fermion-irreduzibel, d.h. in der Störungstheorie bestehen sie aus Graphen, die nicht durch Zerschneiden einer Fermionenlinie in zwei unzusammenhängende Teile zerlegt werden können. Alle anderen Vertizes können mit Hilfe der "Graphenregeln" aus den eigentlichen Vertizes zusammengebaut werden. Dies kommt in der rekursiven Definition der eigentlichen Vertizes Γ_n unmittelbar zum Ausdruck:

$$(15) \quad \Gamma_n = V_n - \sum_{i=1}^{n-1} V_{n-i} S_0 \Gamma_i, \quad n \geq 1.$$

1) "semiproper vertizes" bei Kroll [28]

Hierbei ist wieder zu beachten, daß Symmetrisierung wie in (7a) und Impulssatz wie in (13) stillschweigend impliziert sind. Aus den Gleichungen (12) und der Definition (15) folgt, daß die Γ_n ebenfalls Gleichungen der Form (12) erfüllen:

$$(16) \quad k \cdot \Gamma_n^q = \Gamma_{n-1}^{q+k} - \Gamma_{n-1}^q, \quad n > 1$$

Der Fall $n = 1$ kann hierbei eingeschlossen werden durch die Definition:

$$(15a) \quad \Gamma_0 = -S_0^{-1}$$

Die Gleichungen (11, 12) wurden für $n = 1$ von Takahashi [20] in der lokalen Feldtheorie ohne Benutzung der Störungsentwicklung bewiesen. Für $n = 1$ und $k_\mu \rightarrow 0$ geht (12) in die von Ward [19] angegebene Beziehung über.

Für $n > 1$ und für beliebig viele Fermionenlinien wurden die Gleichungen (11), (12) von Bogoljubov und Schirkov [22], (12), (14) unabhängig davon für eine Fermionenlinie von Kazes [23] abgeleitet, jeweils in der Störungstheorie der gewöhnlichen QED. Ein nicht störungstheoretischer Ansatz wurde von Nishijima [24] gemacht, der die Gleichungen für die zeitgeordneten Produkte ableitete, die unmittelbar zu (8) führen. Die Gleichungen für die eigentlichen Vertizes (16) wurden für $n = 2$ von Kazes [23] und allgemein von Chang und Mani [25] angegeben. Verallgemeinerungen aller Gleichungen für beliebig viele Fermionenlinien sind bei Rivers [26] zu finden, eine systematische Ableitung in der lokalen Feldtheorie findet man bei Kroll [28].

Breitenlohner hat die Gleichungen (11), (12) mit Hilfe von Funktionalmethoden abgeleitet [27]. Hierbei wird deutlich, daß die Gleichungen unmittelbar aus der Eichinvarianz 2. Art folgen, und keine Annahmen über die Vertauschungsbeziehungen der Feldoperatoren oder Ströme nötig sind, d.h., daß Lokalitätsannahmen in den Beweis nicht eingehen. Fraas [31] hat den Versuch unternommen, die Gleichungen (16) aus einer nicht lokalen, eichinvarianten Lagrangefunktion

herzuleiten. Dabei wurde jedoch die Quantisierung der nicht lokalen Theorie nicht ausgeführt (vgl. [14]).

Wir benötigen im folgenden nur die Gleichungen (16), die wir als Chang-Mani-Gleichungen bezeichnen.

Alle diese Gleichungen gelten für die exakten re-normierten oder unrenormierten Größen, und auch in jeder Näherung der Störungstheorie. Für unsere Zwecke betrachten wir sie in der niedrigsten Näherung einer abgeänderten QED.¹⁾

2.5 Die Kroll-Ableitung und die allgemeine Lösung der Chang-Mani-Gleichungen.

Wenn man einen Propagator und eigentliche Mehr-photonenvertizes Γ_n hat, welche die Chang-Mani-Gleichungen (16) erfüllen, so kann man sich nach (15) die eichinvariante Amplitude V_n für den betrachteten Prozeß konstruieren. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (16) wurde von Kroll angegeben [28]. Er konstruierte zunächst eine spezielle Lösung mit Hilfe eines Operators $d^\mu(k)$, den wir als Kroll-Ableitung bezeichnen. Er wirkt jedoch nicht wie ein Differentialoperator, sondern führt zur Bildung von Differenzenquotienten [28, 29]. Die Kroll-Ableitung kann durch folgende Eigenschaften für Funktionen von q definiert werden:

$$(17a) \quad d^\mu(k) a = 0$$

$$(17b) \quad d^\mu(k) q = q^\mu$$

$$(17e) \quad d^\mu(k) [a F(q) + b G(q)] = a d^\mu(k) F(q) + b d^\mu(k) G(q)$$

$$(17d) \quad d^\mu(k) F(q) G(q) = [d^\mu(k) F(q)] G(q) + F(q+k) d^\mu(k) G(q)$$

Für Polynome folgt damit:

$$(18a) \quad d^\mu(k) d^\nu(l) F(q) = d^\nu(l) d^\mu(k) F(q)$$

$$(18b) \quad k_\mu d^\mu(k) F(q) = F(q+k) - F(q)$$

Nach (17a, d) kann auch die Kroll-Ableitung des Inversen einer Funktion angegeben werden:

$$(18c) \quad d^\mu(k) F(q)^{-1} = -F(q+k)^{-1} [d^\mu(k) F(q)] F(q)^{-1}$$

1) Um Abänderungen der QED durch stark wechselwirkende Teilchen zu erhalten, hat man sich die niedrigsten zwei oder drei Näherungen der QED aufsummiert zu denken, da diese Teilchen direkt nur an das Photon gekoppelt sind.

Damit ist die Kroll-Ableitung für rationale Funktionen und für Potenzreihenentwicklungen definiert, was für unsere Zwecke ausreicht.

Anschaulich gesagt, hat die Kroll-Ableitung die Wirkung, an jede Elektronenlinie und jeden Vertex ein zusätzliches Photon mit dem Impuls k_μ anzuhängen, wenn diese vom einlaufenden Impuls q abhängen. Die Produktregel (17d) drückt also die verschiedenen Möglichkeiten für diese Operation und den Impulssatz aus.

Ist nun der Propagator durch $\Gamma_0 = -S_0^{-1}$ vorgegeben, so hat man nach (18b) offenbar eine spezielle Lösung der Chang-Mani-Gleichungen (16) durch sukzessive Kroll-Ableitungen von Γ_0 . Dies sind die induzierten Vertizes. Hierzu können noch die Lösungen der "homogenen Chang-Mani-Gleichungen" addiert werden, die wir als "wesentliche" Vertizes (intrinsic vertices) bezeichnen. Damit haben wir die allgemeine Lösung der Chang-Mani-Gleichungen (16) bei vorgegebenem Propagator:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= -S_0^{-1} \\ (19) \quad \Gamma_1 &= d\Gamma_0 + W_1 \\ \Gamma_2 &= d^2\Gamma_0 + dW_1 + W_2, \text{ u.s.w.} \end{aligned}$$

wobei die "wesentlichen" Vertizes W_n symmetrisch in den n Photonenimpulsen sein und die homogenen Chang-Mani-Gleichungen erfüllen müssen:

$$(19a) \quad k \cdot W_n = 0.$$

Dies nennen wir die Transversalitätsbedingungen. Hierbei ist wegen der Symmetrie nicht zwischen den verschiedenen Photonenimpulsen unterschieden. Außerdem sind in (19), 19a) die Impulsvariablen und die Vierertensorindizes unterdrückt, und der Ausdruck dW_1 ist symmetrisiert zu denken:

$$dW_1 \equiv d^\mu(k) W^\nu(q; k) + d^\nu(l) W^\mu(q; k).$$

Danach wird die eichinvariante Elektron- n - Photonen-Amplitude beschrieben durch den Propagator S_0 und die "wesentlichen" Vertizes W_1 ($i = 1, \dots, n$). Wie wir sehen werden, ist unter den schon erwähnten Voraussetzungen für den Elektronenpropagator diese Beschreibung nicht eindeutig, d.h. es gibt viele verschiedene Sätze $S_0, W_1, W_2, \dots$, welche die gleiche Amplitude liefern. Insbesondere wird sich darunter auch einer befinden, bei dem der Propagator der unveränderte der OED $S_m(q) = \frac{i\cancel{q}-m}{q^2+m^2}$ ist.

3. Die Elektron-Photon-Amplitude

3.1 Die allgemeine eichinvariante Elektron-Photon-Amplitude.

Wir wollen die Konsequenzen dieses Formalismus am Beispiel der Compton-Streuung ohne Abstrahlung und der Paarvernichtung in zwei γ -Quanten diskutieren. Hierzu brauchen wir die Amplitude V_2 . Gemäß (15) wird sie gegeben durch:

$$(20) \quad \begin{aligned} V^{\mu\nu}(q; k, l) = & \Gamma^\mu(q+k; k) S_0(q+k) \Gamma^\nu(q; l) \\ & + \Gamma^\nu(q+k; l) S_0(q+k) \Gamma^\mu(q; k) \\ & + \Gamma^{\mu\nu}(q; k, l) \end{aligned}$$

Einsetzen von (19) und Umformung mit Hilfe von (18c) ergibt folgenden Ausdruck:

$$(21) \quad \begin{aligned} V_2 = & S_0^{-1} [d^2 S_0] S_0^{-1} + S_0^{-1} [d S_0 W_1 S_0] S_0^{-1} \\ & + W_1 S_0 W_1 + W_2 \end{aligned}$$

Hierbei sind der Übersichtlichkeit wegen wieder Impulse und Indizes unterdrückt. Symmetrisierung in den Photonenimpulsen ist impliziert. Der Ausdruck (21) für die Amplitude hängt unmittelbar mit der Tatsache zusammen, daß die Größen $S_n = S_0 V_n S_0$ den Gleichungen (12) genügen, die ebenfalls Lösungen der Gestalt (19) besitzen.

Der Ausdruck (21), in dem W_1 und W_2 die Symmetrie- und Transversalitätsbedingungen (19a) erfüllen, ist die allgemeinste eichinvariante Elektron-Photon-Amplitude.

3.2 Der Beitrag der Off-Shell-Terme des Propagators zum Matricelement.

Um die Übergangsamplitude zu erhalten, müssen wir die Operatoramplitude zwischen Spinorwellenfunktionen im Impulsraum, angedeutet durch $\langle p|, |q \rangle$ einschließen ($p=q+k+l$). An dieser Stelle benötigen wir eine Voraussetzung über den Propagator, die wir bereits erwähnt haben. In der Spektraldarstellung

$$(22) \quad S_0 = \frac{iq-m}{q^2+m^2} + \int d(x^2) \frac{iq\sigma_1(x^2) - x\sigma_2(x^2)}{q^2+x^2} \\ = S_m(q) + A(q) = -\frac{1}{iq+m} [1 - (iq+m)A(q)]$$

sollen die Spektralfunktionen σ_1, σ_2 keine δ -Singularität mehr an der Stelle $x^2=m^2$ haben. D.h. das Elektron soll durch einen einfachen Pol des Propagators beschrieben werden, den des unveränderten Propagators S_m , während der restliche Anteil $A(q)$ auf der Massenschale des Elektrons ($iq|q\rangle = -m|q\rangle$) regulär ist. In der abgeänderten Theorie sollen die gleichen freien Teilchenzustände der Masse m existieren wie in der OED. Die Elektronenspinoren sollen also die gewöhnliche Dirac-Gleichung erfüllen:

$$(23) \quad S_m(q)^{-1}|q\rangle = -(iq+m)|q\rangle = 0$$

Sonstige Eigenschaften von S_0 brauchen wir im folgenden nicht vorauszusetzen; die Spektralfunktionen können negativ sein und die Singularitätenstruktur von S_0 ist außer dem oben Gesagten ganz beliebig. Wir benötigen daher nicht die Voraussetzungen des eindeutigen Vakuums und der positiv definiten Metrik im Hilbertraum, die üblicherweise bei der Spektraldarstellung gemacht werden.

Zur Berechnung von $\langle p|V_2|q \rangle$ benötigen wir S_0^{-1} . Hierzu bilden wir formal das Reziproke von (22) und machen eine Potenzreihenentwicklung:

$$(24) \quad S_0^{-1} = -[1 - (iq+m)A(q)]^{-1}(iq+m) \\ = -[1 + (iq+m)A(q) + (iq+m)^2 A(q)^2 + \dots](iq+m) \\ = -(iq+m) - (iq+m)^2 B(q),$$

wo $B(q)$ wieder regulär für $iq = -m$ ist. Diese Entwicklung ist sicherlich in einer gewissen Umgebung der Massenschale möglich. Aus der Gestalt (24) für S_0^{-1} folgt, daß die freien Elektronenspinoren auch der folgenden Gleichung genügen:

$$(25) \quad S_0(q)^{-1} |q\rangle = 0$$

Der erste Summand in (21) ergibt dann für das Matrixelement ($p=q+k+1$):

$$(26) \quad \begin{aligned} & \langle p | S_0^{-1} [d^2 S_0] S_0^{-1} | q \rangle \\ &= \langle p | [-(i\not{p}+m) - (i\not{p}+m)^2 B(p)] [-d^2 \frac{1}{i\not{q}+m} + d^2 A(q)] [-(i\not{q}+m) - (i\not{q}+m)^2 B(q)] | q \rangle. \end{aligned}$$

Es ist unmittelbar klar, daß der Term $d^2 A(q)$ nichts beiträgt, denn mit $A(q)$ ist auch $d^2 A(q)$ nicht singulär auf der Massenschale des Elektrons, so daß beim Ausmultiplizieren rechts und links Faktoren $i\not{q}+m$ bzw. $i\not{p}+m$ übrig bleiben. Nun haben wir die zweite Kroll-Ableitung des Propagators S_m zu berechnen. Mit den Regeln (18c) und (17b) ist:

$$(27) \quad d S_m = -S_m [d S_m^{-1}] S_m = -\frac{1}{i(q+k)+m} i\not{\gamma}^\mu \frac{1}{i\not{q}+m}$$

und mit (17d) und dem obigen Ergebnis:

$$(28) \quad \begin{aligned} d^2 S_m &= \frac{1}{i\not{p}+m} i\not{\gamma}^\nu \frac{1}{i(q+k)+m} i\not{\gamma}^\mu \frac{1}{i\not{q}+m} \\ &+ (k, \mu \leftrightarrow l, \nu), \end{aligned}$$

wobei die Klammer den Term andeutet, der aus dem ersten durch Vertauschung von k, μ mit l, ν hervorgeht.

$B(q)$ ist wiederum nicht singulär auf der Massenschale des ein- bzw. auslaufenden Elektrons, so daß beim Ausmultiplizieren bei den Termen mit B links ein Faktor $i\not{p}+m$ bzw. rechts $i\not{q}+m$ übrig bleibt. Bei den übrig bleibenden Termen heben sich die Faktoren $i\not{p}+m$ und $i\not{q}+m$ links bzw. rechts weg und wir behalten:

$$(29) \quad \begin{aligned} & \langle p | S_0^{-1} [d^2 S_0] S_0^{-1} | q \rangle \\ &= \langle p | (i\not{\gamma}^\nu \frac{1}{i(q+k)+m} i\not{\gamma}^\mu + i\not{\gamma}^\mu \frac{1}{i(q+l)+m} i\not{\gamma}^\nu) | q \rangle. \end{aligned}$$

Dies ist die Amplitude der gewöhnlichen QED. Damit haben wir das Ergebnis von Kroll [28], daß bei Abwesenheit der "wesentlichen" Vertizes W_n alle Propagatoren die gleiche Amplitude liefern, nämlich die der gewöhnlichen QED, sofern sie die Voraussetzungen von S. 18 erfüllen. Wenn die W_n verschwinden, bleibt nämlich von der Amplitude (21) nur der Term (26) übrig.

Der Beweisgang war im wesentlichen der gleiche wie bei Kroll. Er läßt sich auf den Fall beliebig vieler Photonen verallgemeinern [28, 29].

Beim Vorhandensein von "wesentlichen" Vertizes müssen wir noch die weiteren Terme von (21) betrachten [29]:

$$(30) \quad \langle p | S_0^{-1} [d S_0 W_1 S_0] S_0^{-1} | q \rangle \\ = \langle p | (S_0^{-1} [d S_0] W_1 + d W_1 + W_1 [d S_0] S_0^{-1}) | q \rangle.$$

Der zweite Term enthält S_0 gar nicht. Die beiden übrigen werden ähnlich wie oben behandelt, z.B.:

$$(31) \quad \langle p | S_0^{-1} [d S_0] W_1 | q \rangle \\ = \langle p | [-(i p + m) - (i p + m)^2 B(p)] [-d^\mu(k) \frac{1}{i(q+t)+m} + d^\mu(k) A(q+t)] W^\nu(q,t) | q \rangle \\ + (k, \mu \leftrightarrow l, \nu)$$

Durch Einsetzen von (27) und der entsprechenden Diskussion wie bei (26) erhält man das Ergebnis:

$$(32) \quad \langle p | S_0^{-1} [d S_0] W_1 | q \rangle \\ = \langle p | i \gamma^\mu \frac{1}{i(q+t)+m} W^\nu(q,t) | q \rangle + (k, \mu \leftrightarrow l, \nu)$$

Ganz analog ist das Ergebnis für den dritten Term in (30).

Bei den verbleibenden Termen-erreichen wir unser Ziel durch eine triviale Umformung nach (22):

$$(33) \quad W_1 S_0 W_1 + W_2 = W_1 S_m W_1 + W_1 A W_1 + W_2 \\ = W_1 S_m W_1 + \hat{W}_2.$$

Der "wesentliche" Zwei-Photonen-Vertex $\hat{W}_2$ erfüllt die gleichen Bedingungen wie W_2 , nämlich Symmetrie, Transversalität (19a), und $\hat{W}_2$ hat auf der Massenschale des Elektrons keine Singularität, da A dort nach Voraussetzung auch keine hat.

Wir erhalten also mit dem Propagator S_m und den "wesentlichen" Vertizes $W_1, \hat{W}_2$ das gleiche Matricelement $\langle p|V_2|q \rangle$ wie mit S_0, W_1 und W_2 . Diese Verallgemeinerung des Kroll'schen Ergebnisses wurde zuerst von Ringhofer [29] erzielt und auf den Fall beliebig vieler Photonen verallgemeinert. Mit den Größen S_m, W_1 und $\hat{W}_2$ erhalten wir folgendes V_2 :

$$(34) \quad V_2 = i \gamma S_m i \gamma + i \gamma S_m W_1 + W_1 S_m i \gamma + d W_1 + W_1 S_m W_1 + \hat{W}_2,$$

wobei in unserer abkürzenden Schreibweise wieder Indizes und Impulse unterdrückt sind und Symmetrisierung in den Photonenimpulsen impliziert ist.

3.3 Der "wesentliche" Ein-Photon-Vertex.

Für den allgemeinen Ein-Photon-Vertex: mit drei virtuellen Teilchen gibt es unter der Annahme von C-, P- und T-Invarianz bekanntlich zwölf Terme (siehe z.B. [23]), die man in folgender Weise schreiben kann:

$$(35) \quad \gamma^\mu, [k, \gamma^\mu], k^\mu,$$

sowie diese drei Vektoren links mit $i \not{p} + m$ oder bzw. und rechts mit $i \not{q} + m$ versehen. Bei Aufgabe von C-, P- und T-Invarianz hätte man doppelt so viele Terme, da man alle noch mit $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ multiplizieren kann. Z.B. verletzt der Term $\gamma^\mu \gamma^5$ C und P, der Term $[k, \gamma^\mu] \gamma^5$ P und T.

Diese Terme würden bei den folgenden allgemeinen Betrachtungen nicht stören, jedoch betrachten wir später in den expliziten Beispielen nur Terme, welche die diskreten Symmetrien nicht verletzen.

Der "wesentliche" Ein-Photon-Vertex hat die Bedingung der Transversalität (19a) zu erfüllen:

$$k_\mu \cdot W^\mu = 0$$

Der zweite Term in (35) genügt dieser Bedingung:

$$[k, \gamma^\mu] = 2 (k \gamma^\mu - k^\mu),$$

aus den beiden anderen kann man eine Linearkombination bilden, die diese Bedingung befriedigt:

$$K[k, \gamma^\mu] = 2(k^2 \gamma^\mu - k k^\mu)$$

Damit haben wir für W_1 noch acht Terme.

Die Viererindizes des Matrixelements werden mit den Polarisationsvektoren e^μ, e^ν der Photonen verjüngt. Wegen der Transversalität der Photonen in der Lorentz-Eichung haben wir $e \cdot k = e^\mu k_\mu = 0$. Folglich tragen die Terme mit k^μ bzw. 1^ν nichts zur Amplitude bei. Schließlich sind bei unseren Termen in (34) stets ein Fermion und das Photon auf der Massenschale, also $k^2=0$, und wir behalten nur noch drei Ausdrücke, die zur Amplitude beitragen:

$$(36) \quad \begin{aligned} k \gamma^\mu &\equiv U^\mu \\ (iq+m) k \gamma^\mu \\ k \gamma^\mu (ip+m) \end{aligned}$$

wobei hier q der ein-, p der auslaufende Impuls des Elektrons am Vertex ist. Die Ausdrücke (36) können noch mit beliebigen Funktionen der Invarianten multipliziert werden, welche sich aus den Impulsen bilden lassen. Beim Ein-Photon-Vertex kann man diese Invarianten als Quadrate der drei Impulse schreiben. Also haben wir als allgemeinsten "wesentlichen" Ein-Photon-Vertex, der zur Elektron-Photon-Streuamplitude beiträgt, folgenden Ausdruck:

$$(37) \quad \begin{aligned} W^\mu &= A(k^2, p^2+m^2, q^2+m^2) U^\mu \\ &+ B(k^2, p^2+m^2, q^2+m^2) (iq+m) U^\mu \\ &+ C(k^2, p^2+m^2, q^2+m^2) U^\mu (ip+m) \end{aligned}$$

Für die Funktionen A, B, C folgen aus den diskreten Symmetrien noch gewisse Beziehungen (siehe z.B. [23]). Wir benötigen sie für die folgende allgemeine Diskussion nicht und werden bei den Rechenbeispielen spezielle Annahmen machen.

Zur Bildung der Kroll-Ableitungen werden wir annehmen, daß man die Funktionen A, B, C in der Umgebung der Massenschale in Potenzreihen entwickeln kann. Für (37) ist die Kroll-Ableitung nicht eindeutig definiert, da z.B. (q^2+m^2) mit U^μ vertauschbar ist, nicht jedoch $d^\mu(k)(q^2+m^2)$.

Dies wird durch die Forderung eindeutig gemacht, daß die Faktoren in den Reihenentwicklungen der Funktionen A, B und C stets C-invariant angeordnet werden sollen:

$$(38) \quad A(p^2+m^2, q^2+m^2) U^\mu = \sum_{i,j \geq 0} A_{ij}(p^2+m^2)^i U^\mu (q^2+m^2)^j.$$

(Entsprechend für B und C. In unserem Fall ist $k^2 = 0$.)

3.4 Die Off-Shell-Terme des "wesentlichen" Ein-Photon-Vertex.

Wir betrachten nun den Beitrag des "wesentlichen" Ein-Photon-Vertex (37) mit den wie in (38) entwickelten Funktionen zur Elektron-Photon-Amplitude (21)[29]. Zunächst haben wir den zweiten Term, $S_0^{-1}(dS_0 W_1 S_0) S_0^{-1}$, und ersetzen nach Abschnitt 3.2 S_0 durch den unveränderten Propagator S_m . Die Argumente der Funktionen A, B, C, z.B. q^2+m^2 können wir durch $(iq+m)(-iq+m)$ bzw. $(-iq+m)(iq+m)$ ersetzen:

$$(39) \quad \begin{aligned} & S_m W_1 S_m \\ &= \sum_{i,j \geq 0} \left\{ A_{ij} (i(q+l)+m)^{i-1} (-i(q+l)+m)^i U^\nu (iq+m)^j (iq+m)^{j-1} \right. \\ & \quad + B_{ij} (i(q+l)+m)^i (-i(q+l)+m)^{i-1} U^\nu (-iq+m)^j (iq+m)^{j-1} \\ & \quad \left. + C_{ij} (i(q+l)+m)^{i-1} (-i(q+l)+m)^i U^\nu (-iq+m)^j (iq+m)^{j-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d^\mu(k) S_m W^\nu S_m \\
 (40) = & A_{00} \left\{ \frac{1}{i p+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i(q+t)+m} U^\nu \frac{1}{i q+m} + \frac{1}{i p+m} U^\nu \frac{1}{i(q+t)+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i q+m} \right\} \\
 & + B_{00} U^\nu \frac{1}{i(q+t)+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i q+m} + C_{00} \frac{1}{i p+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i(q+t)+m} U^\nu \\
 & + \sum_{i \geq 1} \left\{ A_{i0} [d^\mu(i(q+t)+m)^{i-1} (-i(q+t)+m)^i] U^\nu \frac{1}{i q+m} \right. \\
 & \quad + A_{i0} (i p+m)^{i-1} (-i p+m)^i U^\nu \frac{1}{i(q+t)+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i q+m} \\
 & \quad + B_{i0} [d^\mu(i(q+t)+m)^i (-i(q+t)+m)^{i-1}] U^\nu \frac{1}{i q+m} \\
 & \quad + B_{i0} (i p+m)^i (-i p+m)^{i-1} U^\nu \frac{1}{i(q+t)+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i q+m} \\
 & \quad \left. + C_{i0} [d^\mu(i(q+t)+m)^{i-1} (-i(q+t)+m)^i] U^\nu \right\} \\
 & + \sum_{j \geq 1} \left\{ A_{0j} \frac{1}{i p+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i(q+t)+m} U^\nu (-i q+m)^\delta (i q+m)^{\delta-1} \right. \\
 & \quad + A_{0j} \frac{1}{i p+m} U^\nu [d^\mu(-i q+m)^\delta (i q+m)^{\delta-1}] \\
 & \quad + B_{0j} U^\nu [d^\mu(-i q+m)^\delta (i q+m)^{\delta-1}] \\
 & \quad + C_{0j} \frac{1}{i p+m} i \gamma^\mu \frac{1}{i(q+t)+m} U^\nu (-i q+m)^\delta (i q+m)^\delta \\
 & \quad \left. + C_{0j} \frac{1}{i p+m} U^\nu [d^\mu(-i q+m)^\delta (i q+m)^\delta] \right\} \\
 & + \sum_{i,j \geq 1} (\dots),
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Summe keine singulären Faktoren $(i p+m)^{-1}$ oder $(i q+m)^{-1}$ mehr enthält. Nach Multiplikation mit S_m^{-1} von rechts und links und Einschließung zwischen freien Elektronenspinoren verbleibt offenbar nur der

$$A_{00}\text{-Term: } \langle p | S_m(p)^{-1} [d S_m W^\nu S_m] S_m(q)^{-1} | q \rangle$$

$$\begin{aligned}
 (41) = & \langle p | (i \gamma^\mu \frac{1}{i(q+t)+m} A_{00} U^\nu + A_{00} U^\nu \frac{1}{i(q+t)+m} i \gamma^\mu) | q \rangle \\
 & + (k, \mu \longleftrightarrow l, \nu)
 \end{aligned}$$

Hier trägt also von W_1 (37) nur der Anteil

$$(42) \quad \hat{W}_1 = A_{00} U^\mu$$

bei, der von (37) übrig bleibt, wenn alle drei Impulse auf der Massenschale sind, also der "On-Shell-Term" von (37). Nun sind noch die beiden letzten Terme in (21) zu diskutieren, z.B.:

$$(43) \quad \begin{aligned} & W^\mu(q+t; k) S_m(q+t) W^\nu(q; t) + W_2^{1)} \\ &= A(0, (q+t)^2 + m^2) U^\mu \frac{-1}{i(q+t)+m} U^\nu A((q+t)^2 + m^2, 0) \\ &- A(0, (q+t)^2 + m^2) B((q+t)^2 + m^2) U^\mu U^\nu \\ &- C(0, (q+t)^2 + m^2) A((q+t)^2 + m^2) U^\mu U^\nu \\ &- C(0, (q+t)^2 + m^2) U^\mu (i(q+t)+m) U^\nu B((q+t)^2 + m^2, 0) \end{aligned}$$

Die letzten drei Ausdrücke enthalten keine Ein-Teilchensingularitäten für $p^2 = -m^2$. Betrachten wir noch den ersten:

$$(44) \quad \begin{aligned} & \sum_{j>0} A_{0j} U^\mu (-i(q+t)+m)^j (i(q+t)+m)^j \frac{-1}{i(q+t)+m} \\ & \cdot A_{i0} (i(q+t)+m)^i (-i(q+t)+m)^i U^\nu \\ &= A_{00} U^\mu S_m(q+t) A_{00} U^\nu + \sum_{i,j \geq 1} (\dots) \\ &= \hat{W}_1 S_m \hat{W}_1 + \sum_{i,j \geq 1} (\dots) \end{aligned}$$

Dabei sind Terme weggelassen, die auf der Massenschale des Elektrons verschwinden, und die nicht ausgeschriebene Summe enthält keine dort singulären Faktoren. Daher können wir schreiben:

$$(45) \quad \langle p | (W_1 S_m W_1 + W_2) | q \rangle = \langle p | (\hat{W}_1 S_m \hat{W}_1 + \hat{W}_2) | q \rangle$$

wobei $\hat{W}_1$ keine Off-Shell-Terme enthält (42), und $\hat{W}_2$ durch Zusammenfassung der letzten drei Terme in (43) und der letzten

1) Eigentlich müßten wir hier $\hat{W}_2$ schreiben (s.S. 21), jedoch sind W_2 und $\hat{W}_2$ hier gleich beliebig.

Summe in (44) mit W_2 (bzw. $\hat{W}_2$) entsteht. $\hat{W}_2$ erfüllt die gleichen Bedingungen wie W_2 (bzw. $\hat{W}_2$), nämlich Transversalität (19a) und Abwesenheit von Ein-Teilchen-Singularitäten.

In $\hat{W}_2$ spielen nur On-Shell-Terme eine Rolle, da in unserem Fall die vier äußeren Teilchen auf der Massenschale sind. Betrachtet man Prozesse mit mehr als zwei Photonen, so muß man die hier begonnene Prozedur fortsetzen. Sie läßt sich für beliebiges n durchführen [29] .

Damit haben wir folgendes Ergebnis: Man kann die gleiche Elektron-Photon-Streuamplitude beschreiben durch folgende Propagatoren und "wesentlichen" Ein- und Zwei-Photonen-Vertizes:

$$(46a) \quad S_0, W_1, W_2$$

$$(46b) \quad S_m, \hat{W}_1, \hat{W}_2$$

$$(46c) \quad S_m, \hat{W}_1, \hat{W}_2$$

Dabei ist S_0 der abgeänderte, S_m der nicht abgeänderte Elektronenpropagator (22), die W 's sind transversal (19a) und symmetrisch in den Photonenimpulsen, und die $\hat{W}$'s enthalten keine Off-Shell-Terme (37), (42).¹⁾

Folglich ist es nicht möglich, durch Messung der Elektron-Photon-Streuamplitude, also z. B. Compton-Streuung oder Paarvernichtung in zwei Quanten, zwischen den verschiedenen Möglichkeiten (46) zu unterscheiden.

1) Dieses Ergebnis wurde zuerst von Breitenlohner vermutet [30] .

3.5 Der in $\hat{W}_1$ lineare Beitrag zur Amplitude.

Wir können nun $\hat{W}_1$ (42) in die Amplitude (34) einsetzen und die in $\hat{W}_1$ linearen Terme zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu S_m \hat{W}^\nu &= i\gamma^\mu \frac{i(q+l) - m}{(q+l)^2 + m^2} A_{00} U^\nu \\
 (47) \quad &= i \frac{2i(q^\mu + l^\mu) + i\gamma^\mu}{2q \cdot l} A_{00} U^\nu \\
 &= -\frac{A_{00}}{2q \cdot l} (2p^\mu + k\gamma^\mu) U^\nu
 \end{aligned}$$

Hierbei ist benutzt, daß Terme proportional zu k^μ (bzw. l^ν) nicht zum Matricelement beitragen (S.22). Entsprechend:

$$(48) \quad \hat{W}^\mu S_m i\gamma^\nu = -\frac{A_{00}}{2q \cdot l} U^\mu (2q^\nu + k\gamma^\nu)$$

Durch Einsetzen von $U^\mu = \gamma^\mu$ (bzw. $U^\nu = \gamma^\nu$) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu S_m \hat{W}^\nu + \hat{W}^\mu S_m i\gamma^\nu &= -\frac{A_{00}}{q \cdot l} \{k\gamma^\mu q^\nu + k\gamma^\nu k\gamma^\mu + k\gamma^\nu p^\mu\} \\
 (49) \quad i\gamma^\nu S_m \hat{W}^\mu + \hat{W}^\mu S_m i\gamma^\nu &= -\frac{A_{00}}{q \cdot k} \{l\gamma^\nu q^\mu + l\gamma^\mu k\gamma^\nu + k\gamma^\mu p^\nu\}
 \end{aligned}$$

4. Durchrechnung zweier Beispiele.

4.1 Die "wesentlichen" Vertizes und die Amplituden.

Zur Illustration der Verhältnisse berechnen wir die Wirkungsquerschnitte für Compton-Streuung und Paarvernichtung für spezielle Beispiele der Fälle (46 b, 46 c).

Fall 1:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= S_m \\
 (50) \quad \hat{W}_1 &= \frac{a}{2m} k\gamma^\mu + \frac{b}{2m^2} \{i(q+m)k\gamma^\mu + k\gamma^\mu i(p+m)\} \\
 \hat{W}_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Hierbei sind in dem allgemeinen Ausdruck (37) für W_1 nur die konstanten Glieder in den Entwicklungen (38) der Funktionen A, B und C mitgenommen. Diese müssen bei C-, P- und T-Invarianz für A reell, für B und C gleich und reell sein. Natürlich könnte man auch explizite Funktionen für A, B und C annehmen, jedoch fehlen hier Gesichtspunkte für eine Auswahl. Zudem kann man erwarten, daß sich bei auftretenden Abweichungen von der OED die konstanten Terme zuerst bemerkbar machen werden. Die Größe a beschreibt offenbar ein zusätzliches magnetisches Moment¹⁾ wie es beim Nukleon auf Grund der starken Wechselwirkung, beim Elektron infolge höherer Näherungen der OED auftritt.²⁾ Bekanntlich erwartet man hierzu auch beim Elektron und Myon Beiträge von der starken und schwachen Wechselwirkung (siehe z.B. [33, 34, 35]). Der b-Term ist nicht anschaulich deutbar, da er auf der Massenschale des Elektrons verschwindet (Off-Shell-Term)³⁾.

Für die Größen (50) lautet die Amplitude gemäß (34) und (49):

$$\begin{aligned}
 V^{\mu\nu}(q; k, l) = & \gamma^\nu S_m(q+k) \gamma^\mu \\
 & - \frac{m}{2mq \cdot k} \{ \epsilon \gamma^\nu q^\mu + \epsilon \gamma^\nu k \gamma^\mu + k \gamma^\mu p^\nu \} \\
 (51) \quad & + \frac{1}{4m} \left\{ -\frac{1}{2q \cdot k} a^2 - \frac{2}{m^2} ab - \frac{1}{m^2} b^2 \right\} \epsilon \gamma^\nu k \gamma^\mu \\
 & + \frac{1}{4m^2} \left\{ \frac{1}{2q \cdot k} a^2 - \frac{1}{m^2} b^2 \right\} \epsilon \gamma^\nu i \not{q} k \gamma^\mu \\
 & + (k, \mu \longleftrightarrow l, \nu)
 \end{aligned}$$

- 1) Der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung mit konstantem anomalen Moment wurde bereits von Powell [32] angegeben.
- 2) siehe Anhang 4.
- 3) Kroll, der den Einfluß eines solchen Terms auf die Paarerzeugung abgeschätzt hat, bezeichnete ihn als "off-shell magnetic moment" [28].

Hier ist zu beachten, daß kein Term proportional zu b auftritt, da der in den Off-Shell-Termen lineare Beitrag wegfällt (s. Abschnitt 3.4).

Im zweiten Fall nehmen wir, den Betrachtungen in Abschnitt 3.4 entsprechend, nur den "On-Shell"-Anteil des "wesentlichen" Ein-Photonen-Vertex mit, haben dafür aber einen nicht verschwindenden Zwei-Photonen-Vertex.

Fall 2:

$$\begin{aligned}
 (52) \quad S_0 &= S_m \\
 W_1 &= \frac{a}{2m} \not{k} \not{\gamma}^\mu \\
 W_2 &= \frac{c}{m^3} \not{x} \not{\gamma}^\nu \not{k} \not{\gamma}^\mu + (k, \mu \leftrightarrow l, \nu),
 \end{aligned}$$

wobei a und c wieder reelle Konstanten sind.

Hier ist zu bemerken, daß für den Zwei-Photonen-Vertex W_2 bei C-, P- und T-Invarianz sechs Terme möglich sind (siehe z.B. [36]). Wir haben hier einen bestimmten Term als Beispiel ausgewählt.

Die volle Compton-Amplitude hat ja ebenfalls nach (14) Transversalitätsbedingungen zu erfüllen:

$$(53) \quad k_\mu \langle p | V^{\mu\nu} | q \rangle = l_\nu \langle p | V^{\mu\nu} | q \rangle = 0$$

Wenn alle vier äußeren Teilchen auf der Massenschale sind, ist dies genau so einschränkend wie die Bedingung (19a) für W_2 . Der Unterschied zwischen V_2 und W_2 ist jedoch, daß W_2 keine Ein-Elektron-Singularitäten enthält.

Im Fall 2 lautet die Amplitude dann:

$$\begin{aligned}
 (54) \quad V^{\mu\nu}(q; k, l) &= \not{\gamma}^\nu S_m(q+k) \not{\gamma}^\mu \\
 &- \frac{a}{2mq \cdot k} \{ \not{x} \not{\gamma}^\nu \not{q}^\mu + \not{x} \not{\gamma}^\nu \not{k} \not{\gamma}^\mu + \not{k} \not{\gamma}^\mu \not{p}^\nu \} \\
 &+ \frac{a^2}{8m^2 q \cdot k} \{ -m \not{x} \not{\gamma}^\nu \not{k} \not{\gamma}^\mu + \not{x} \not{\gamma}^\nu i \not{q} \not{k} \not{\gamma}^\mu \} \\
 &+ \frac{c}{m^3} \not{x} \not{\gamma}^\nu \not{k} \not{\gamma}^\mu \\
 &+ (k, \mu \leftrightarrow l, \nu)
 \end{aligned}$$

4.2 Wirkungsquerschnitte.

Die Amplituden (51), (54) sind noch zwischen ein- und auslaufenden Elektronenspinoren einzuschließen und mit den Polarisationsvektoren der Photonen zu multiplizieren; dann ist das Absolutquadrat zu bilden.

Wir berechnen die Wirkungsquerschnitte für unpolarisierte Teilchen, daher haben wir über die Spineinstellungen und Polarisationen im Anfangszustand zu mitteln, über die im Endzustand zu summieren. Dies führt dazu, daß sich das Quadrat der Amplitude durch eine Spur ausdrücken läßt, in der die Projektionsoperatoren auf die Elektronen- bzw. Positronenzustände $\Lambda_{\pm}(q) = \frac{m \pm i \not{q}}{2m}$ auftreten, und das Tensorprodukt der Polarisationsvektoren durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ zu ersetzen ist (siehe z.B. [10], Appendix 2).

$$(55) \quad T = \sum_{\substack{\text{Spin}, \\ \text{Polarisation}}} |\bar{u}(p) \epsilon_{\mu} V^{\mu\nu} e'_{\nu} u(q)|^2 = \frac{1}{4} \text{Sp} (\bar{V}^{\mu\nu} \Lambda_{-}(p) V_{\mu\nu} \Lambda_{-}(q))$$

Dabei bedeutet $\bar{V}^{\mu\nu}$ den Ausdruck, der aus $V^{\mu\nu}$ hervorgeht, wenn man alle nicht vertauschbaren Faktoren in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Der Faktor $\frac{1}{4}$ rührt von der Mittelung über die Anfangszustände her.

Die zur Berechnung von (55) aus (51) bzw. (54) nötigen Spuren sind im Anhang 1 zusammengestellt. Es ergeben sich folgende Ausdrücke für die Amplitudenquadrate:

$$(56) \quad \begin{aligned} \text{Fall 1: } T = & \frac{1}{2m^2} \left\{ \frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} + 2 \left(\frac{m^2}{x} - \frac{m^2}{x'} \right) + \left(\frac{m^2}{x} - \frac{m^2}{x'} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{a}{m^2} \left\{ \frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} - 2 \right\} \\ & + \frac{a^2}{m^2} \left\{ -2 \frac{x' - x}{m^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} \right) - \frac{1}{2} \right\} \\ & + \frac{ab}{m^2} \left\{ \frac{x}{x'} + \frac{x'}{x} - 2 \right\} \\ & + \frac{b^2}{2m^2} \left\{ \frac{1}{m^2} \left(\frac{x'^2}{x} - \frac{x^2}{x'} \right) + \frac{2}{m^4} (x'^2 + x^2) + \frac{1}{m^2} (x' - x) + 2 \left(\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} \right) - 4 \right\} \\ & + \frac{a^3}{m^2} \left\{ -2 \frac{x' - x}{m^2} - \frac{1}{2} \frac{(x' - x)^2}{x' x} \right\} \\ & + \frac{ab^2}{2m^2} \frac{(x' - x)^3}{m^2 x' x} \\ & + \frac{a^2 b}{m^2} \left\{ -2 \frac{(x' - x)^2}{m^4} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & + \frac{a^4}{m^2} \cdot \frac{1}{4} \left\{ \frac{x'x}{m^4} - \frac{x'-x}{m^2} - \frac{(x'-x)^2}{2x'x} \right\} \\
 & + \frac{a^3b}{m^2} \left\{ - \frac{(x'-x)^2}{m^4} - \frac{(x'-x)^3}{4m^2x'x} \right\} \\
 & + \frac{a^2b^2}{m^2} \left\{ \frac{5}{2} \frac{x'x}{m^6} (x'-x) - \frac{x'^3-x^3}{m^6} + \frac{(x'-x)^2}{2m^4} \right\} \\
 & + \frac{ab^3}{m^2} \left\{ - \frac{(x'-x)^3}{m^6} + \frac{(x'-x)^2}{m^4} \right\} \\
 & + \frac{b^4}{m^2} \left\{ \frac{x'x}{2m^8} (x'^2+x^2) + \frac{x'x}{m^6} (x'-x) + \frac{(x'-x)^2}{2m^4} \right\}^{1)}
 \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}
 (57) \quad T = & \frac{1}{2m^2} \left\{ \frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} + 2 \left(\frac{m^2}{x} - \frac{m^2}{x'} \right) + \left(\frac{m^2}{x} - \frac{m^2}{x'} \right)^2 \right\} \\
 & + \frac{a}{m^2} \left\{ \frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} - 2 \right\} \\
 & + \frac{a^2}{m^2} \left\{ -2 \frac{(x'-x)}{m^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} \right) - \frac{1}{2} \right\} \\
 & + \frac{c}{m^2} \left\{ - \left(\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'} \right) + 2 \right\} \\
 & + \frac{ac}{m^2} \left\{ -4 \frac{(x'-x)^2}{m^4} \right\} \\
 & + \frac{a^3}{m^2} \left\{ -2 \frac{x'-x}{m^2} - \frac{(x'-x)^2}{2x'x} \right\} \\
 & + \frac{a^4}{4m^2} \left\{ \frac{x'x}{m^4} - \frac{x'-x}{m^2} - \frac{(x'-x)^2}{2x'x} \right\} \\
 & + \frac{a^2c}{m^2} \left\{ 2 \frac{(x'-x)^2}{m^4} + \frac{(x'-x)^3}{2m^2x'x} \right\} \\
 & + \frac{c^2}{m^2} \left\{ -4 \frac{(x'-x)^3}{m^6} + 4 \frac{(x'-x)^2}{m^4} \right\}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $x = -q \cdot k = p \cdot l$, $x' = q \cdot l = -p \cdot k$ (beide Photonen einlaufend).

¹⁾ Das Hochenergieverhalten der Terme mit b^2 und b^4 entspricht der von Kroll [28] für die Paarerzeugung gegebenen Abschätzung.

Die vollständigen differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitte für Compton-Streuung und Paarvernichtung in zwei Quanten, letzteres für ruhendes Elektron und für gegenläufige Strahlen, sind in den Anhängen 2 und 3 angegeben.

Die Wirkungsquerschnitte divergieren mit der Energie, da die Zusatzterme in (51), (54) durch Ableitungskopplungen entstehen. Diese Divergenzen könnten durch Einsetzen geeigneter Formfaktoren gedämpft werden.

Die höheren Potenzen von a , b , c in (56), (57) können nicht vernachlässigt werden, da bei hohen Energien die Terme mit der höchsten Potenz von b bzw. c die größten sind.¹⁾

4.3 Vergleich mit Experimenten und Diskussion.

Wir wollen nun sehen, wie weit die Konstanten ²⁾ a , b , c durch unsere bisherige experimentelle Kenntnis eingeschränkt werden. Wie schon erwähnt, liefert der a -Term in niedrigster Näherung ein zusätzliches anomales magnetisches Moment a des Elektrons, in Einheiten des Bohr'schen Magnetons.

Nach der neuen Messung von $g-2$ durch Wesley und Rich [37] ergibt sich ³⁾:

$$(58) \quad a = \mu_{exp} - \mu_{QED} = -(0,5 \pm 7) \cdot 10^{-9}$$

Die Konstante b bzw. c wird am meisten durch das Paarvernichtungsexperiment von Fabiani und Mitarbeitern [38] eingeschränkt. Hierbei wurden Positronen auf ruhende Elektronen geschossen, der totale Wirkungsquerschnitt wurde gemessen. Bei der höchsten Positronenenergie von 9,64 GeV ergibt sich für die Differenz des gemessenen Wertes und des nach der QED berechneten (einschließlich Strahlungskorrekturen von $5 \mu b$):

$$(59) \quad \sigma_{exp} - \sigma_{QED} = [(0,128 \pm 0,007) - 0,131] mb = (-3 \pm 7) \mu b$$

1) Zur Frage nach dem Gültigkeitsbereich der niedrigsten Näherung siehe S. 35.

2) vgl. S. 27 f.

3) siehe Anhang 4

Aus (56), (57) erhalten wir in der Hochenergienäherung ($\gamma = \frac{E}{m} \gg 1$) folgende führenden Terme im Wirkungsquerschnitt¹⁾ und folgende Einschränkungen für b und c durch den obigen experimentellen Fehler:

$$(60) \quad \text{Fall 1: } \sigma = r_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{\gamma} [\ln 2\gamma - 1] - \frac{2}{3} b^2 \gamma + \frac{1}{20} b^4 \gamma^3 \right\} \quad 2) \\ b \leq 4,5 \cdot 10^{-5}$$

wobei der zweite Term die Schranke b liefert.

$$(61) \quad \text{Fall 2: } \sigma = r_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{\gamma} [\ln 2\gamma - 1] - 4c \frac{1}{\gamma} \ln 2\gamma + 4c^2 \gamma^2 \right\} \\ c \leq 1,3 \cdot 10^{-7}$$

Hierbei wird die Einschränkung durch den letzten Term bestimmt.

Diese oberen Grenzen für b und c können erheblich weiter eingeschränkt werden, wenn bei Paarvernichtungsexperimenten mit den vorhandenen bzw. geplanten gegenläufigen Strahlen (colliding beams) keine Abweichungen von der QED gefunden werden. Hierbei erhalten wir in der Hochenergienäherung ($\theta^2 \gg \frac{2}{\gamma}$) aus (56), (57) folgende führenden Terme im differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$(62) \quad \text{Fall 1: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{2 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} - 2b^2 \gamma^4 (1 + \cos^2\theta) + b^4 \gamma^6 (1 - \cos^4\theta) \right\}$$

$$(63) \quad \text{Fall 2: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{2 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} + 32c^2 \gamma^4 \right\}$$

Alle übrigen Terme sind gegen diese für alle betrachteten Parameterwerte und Energiebereiche zu vernachlässigen.³⁾

Für die vorhandenen bzw. geplanten Maschinen mit gegenläufigen Strahlen ergeben sich mit den obigen Parametern in Seitwärtsrichtung die Wirkungsquerschnitte in Tabelle 1.

($E = \gamma m$ Energie eines Primärteilchens).

1) siehe Anhang 3.3

2) $r_0 = \frac{e^2}{4\pi m} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ ist der klassische Elektronenradius.

3) siehe Anhang 3.1

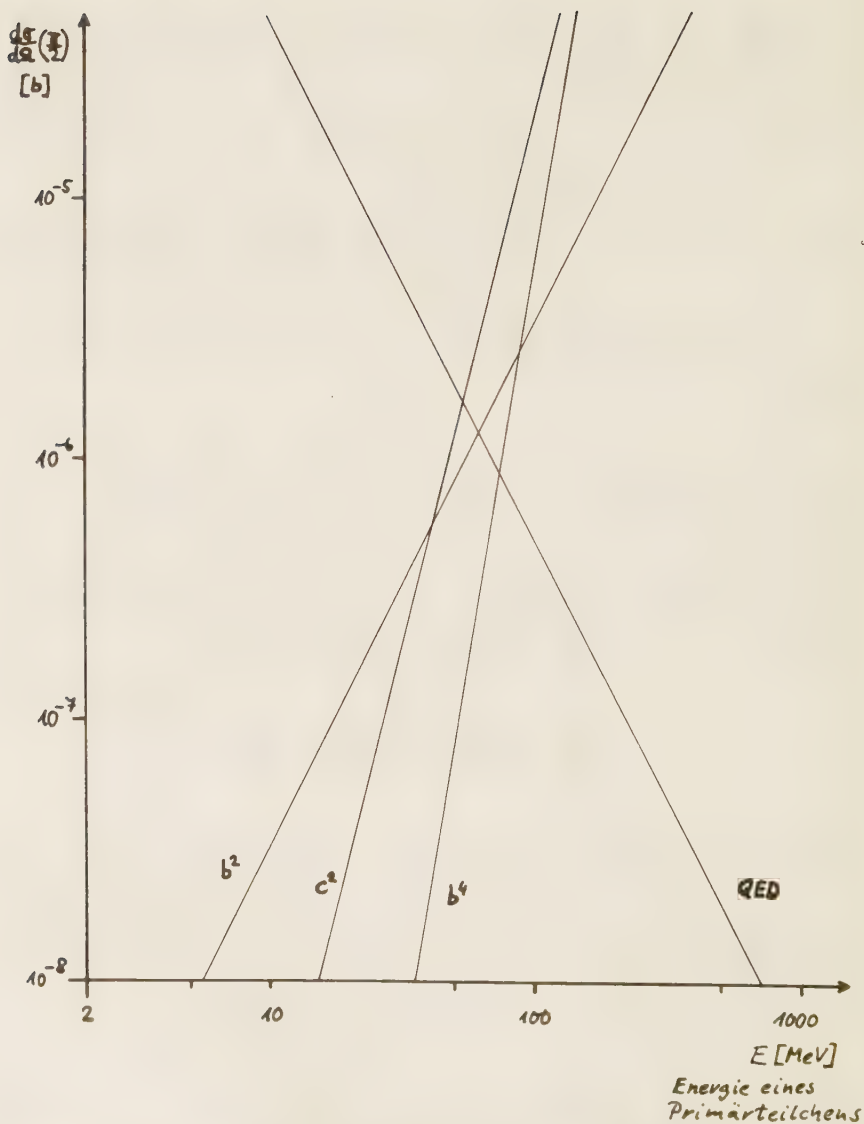


Fig. 1. Differentieller Wirkungsquerschnitt für Paarver= nichtung im Schwerpunktssystem in Seitwärtsrichtung:

Die einzelnen Terme der Wirkungsquerschnitte (62), (63) für $\theta = \frac{\pi}{2}$ mit den Konstanten $b = 4,5 \cdot 10^{-5}$, $c = 1 \cdot 10^{-7}$ aus (60), (61) (s. S. 324).

$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\frac{\pi}{2}) [b]$	Orsay ACO 550 MeV $\gamma = 1,1 \cdot 10^3$	Novosibirsk VEPP 2 700 MeV $\gamma = 1,4 \cdot 10^3$	Frascati ADONE 1,5 GeV $\gamma = 3 \cdot 10^3$	Desy u.a. DORIS u.a. 3,5 GeV $\gamma = 7 \cdot 10^3$
$\frac{\tau_0^2}{4\gamma^2}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-9}$	$4,1 \cdot 10^{-10}$
$\frac{\tau_0^2}{4} b^4 \gamma^6$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$6,0 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^1$	$9,4 \cdot 10^3$
$8\tau_0^2 c^2 \gamma^4$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^1$
$b \leq$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$8,4 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{-8}$
$c \leq$	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$6,5 \cdot 10^{-11}$	$6,6 \cdot 10^{-12}$	$5,2 \cdot 10^{-13}$

Tab. 1

Die Wirkungsquerschnitte sind in **barn** angegeben ($1b = 10^{-24} \text{ cm}^2$). In der ersten Zeile stehen die Wirkungsquerschnitte der QED. Die Zahlen in der zweiten und dritten Zeile sind nach (60), (61) obere Schranken für den Wirkungsquerschnitt.¹⁾

In der vierten und fünften Zeile sind die oberen Schranken für b und c angegeben, die sich ergeben, wenn bei den jeweiligen Energien keine Abweichung von der QED innerhalb eines Meßfehlers von 100% gefunden wird.²⁾ Wie man sieht, könnten die Parameter b bzw. c schon durch Experimente bei der niedrigsten zur Verfügung stehenden Maschinenenergie erheblich weiter eingeschränkt werden.

In Fig. 1 sind die verschiedenen Terme der Wirkungsquerschnitte (62), (63) für den Winkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ und die Werte von b und c aus (60), (61) aufgetragen. Im doppelt logarithmischen Maßstab ergeben sich lauter Gerade, In Fig. 2 sind die gesamten

- 1) Beim Vergleich mit den künftigen Experimenten sind noch die Strahlungskorrekturen zu berücksichtigen [39] .
- 2) Da der Paarvernichtungsquerschnitt bei den betrachteten Energien sehr klein ist, wird die Meßgenauigkeit nicht sehr groß sein.

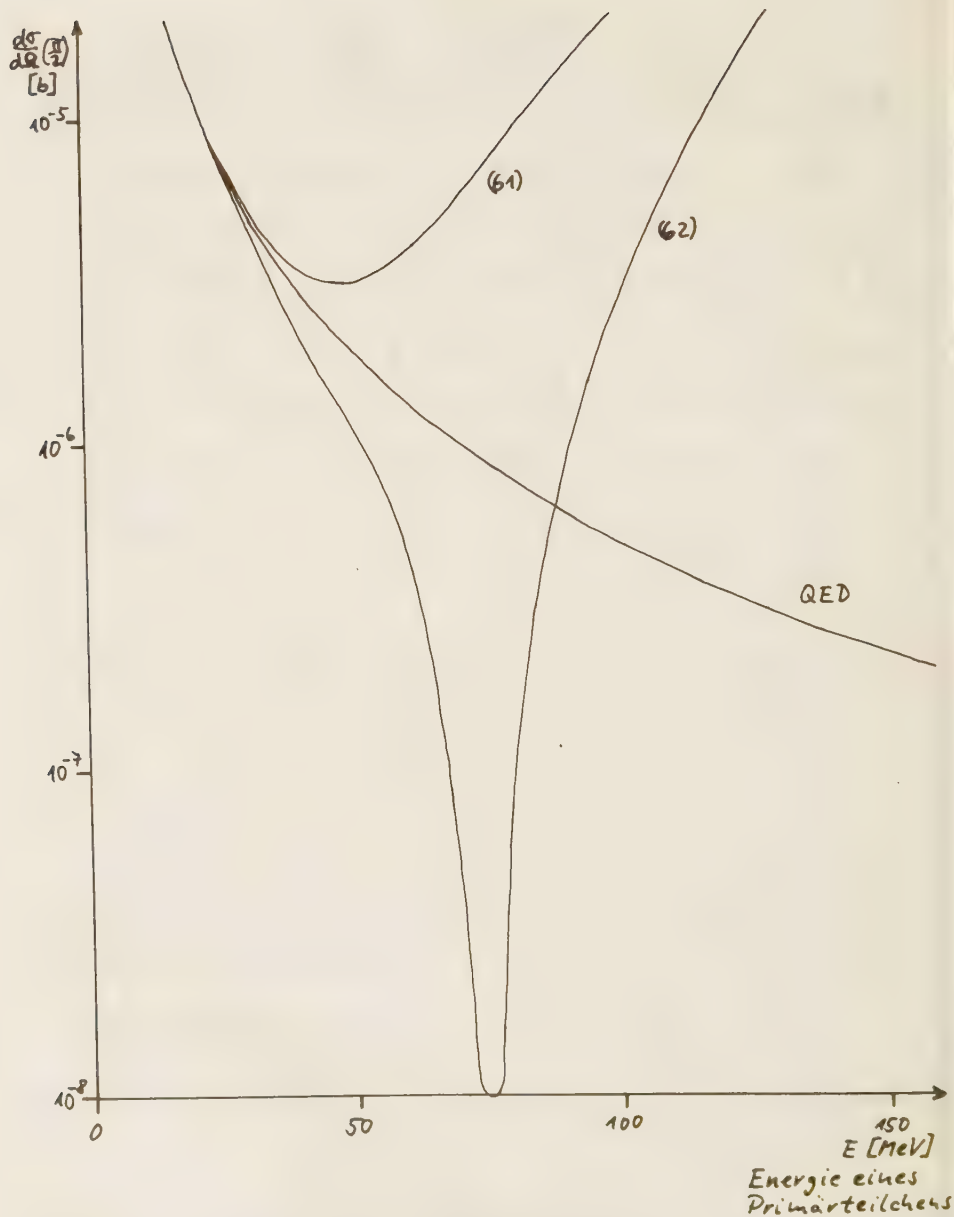


Fig. 2. Differentieller Wirkungsquerschnitt für Paarvernichtung im Schwerpunktsystem in Seitwärtsrichtung:

Die gesamten Wirkungsquerschnitte (62), (63) mit den Konstanten $b = 4,5 \cdot 10^{-5}$ und $c = 1,3 \cdot 10^{-7}$ aus (60), (61) (s. S. 32ff).

Wirkungsquerschnitte halblogarithmisch dargestellt. Der negative zweite Term in (62) führt zu einem schmalen, tiefen Minimum. Eine solche Struktur wäre experimentell nicht gut nachweisbar. Zur Bestimmung der oberen Schranke für b in Tabelle 1 wurde daher nur der ansteigende Teil der Kurve betrachtet. Der zweite Term in (63) ist winkelunabhängig, entsteht also durch reine s-Wellen-Streuung. Hierfür läßt sich auf Grund der Unitaritätsbedingung eine obere Schranke angeben [40], etwa für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (Hochenergienäherung):

$$(64) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \leq \frac{1}{2m^2 y^2}$$

In Fig. 3 sieht man, daß der zweite Term in (63) mit dem maximalen Parameter aus (61) diese Unitaritätsgrenze bei etwa 320 MeV verletzen würde. Immerhin läßt die Unitaritätsbedingung Wirkungsquerschnitte zu, die den der QED um mehrere Größenordnungen übersteigen. Der Anstieg mit einer hohen Potenz der Energie, der auch zu den ungeheuer großen Wirkungsquerschnitten in der dritten Zeile von Tabelle 1 führt, läßt den Term aber auf jeden Fall die Unitaritätsgrenze bei irgendeiner Energie verletzen, dieser Punkt kann nur durch Verkleinerung des Parameters c zu hohen Energien verschoben werden. Es ist jedoch zu bemerken, daß die Unitaritätsbedingung (64) nur für den exakten Wirkungsquerschnitt gilt. In niedrigster Näherung einer Störungsentwicklung läßt sich (64) nicht ableiten, sondern es folgt lediglich, daß die Streuamplitude reell sein muß. Die Verletzung von (64) durch den Wirkungsquerschnitt in niedrigster Näherung deutet also an, daß höhere Ordnungen zu berücksichtigen sind. Dies ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die Vertizes (50), (52) durch Ableitungskopplungen zustande kommen, welche bekanntlich nicht renormierbar sind. In unserer phänomenologischen Beschreibung werden wir diese höheren Näherungen durch Formfaktoren pauschal zu erfassen suchen. Das heißt, daß unser Ansatz von konstanten Formfaktoren eine Beschreibung des Wirkungsquerschnitts nur in einem gewissen Energiebereich geben kann.

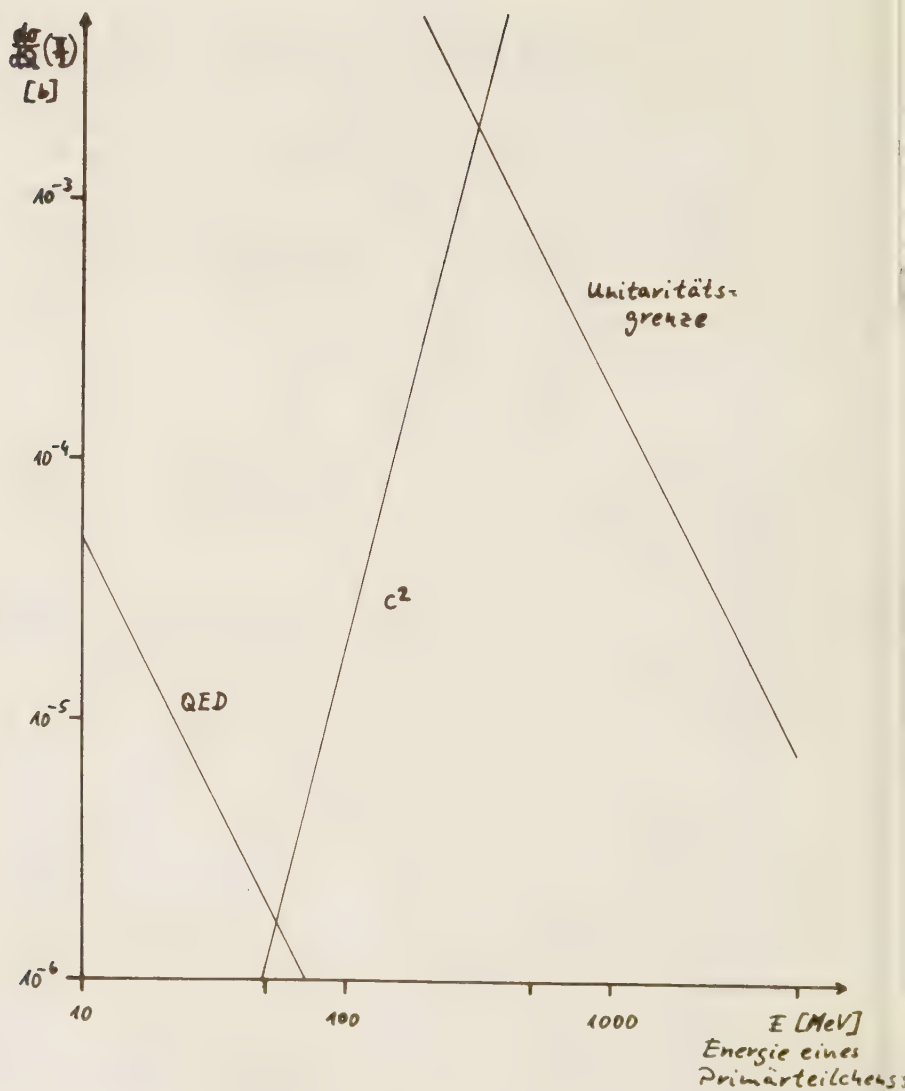


Fig. 3. Differentieller Wirkungsquerschnitt für Paarvernichtung im Schwerpunkssystem in Seitwärtsrichtung:

Die einzelnen Terme des Wirkungsquerschnitts (63) für $\theta = \frac{\pi}{2}$ mit der Konstanten $c = 1,3 \cdot 10^{-3}$ aus (61) und die Unitaritätsgrenze für s-Wellen-Streuung (64) (s. S. 32 ff.).

Entsprechendes erwarten wir bei den Termen in (62), obwohl dort die Bedingung (64) nicht anwendbar ist, da diese alle Partialwellen enthalten.

Wir messen also den großen Zahlen in Tabelle 1 keine physikalische Bedeutung bei, sondern erwarten, daß der Anstieg der Wirkungsquerschnitte durch geeignete Formfaktoren hinreichend gedämpft wird. In (50) und (52) sind anstatt der Konstanten ja eigentlich Funktionen von den Impulsen wie in (38) einzusetzen. Für diese Formfaktoren müßte man theoretische Ansätze machen, jedoch führt dies über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.¹⁾ Wir hatten uns die Frage gestellt, inwieweit Abänderungen der QED durch allgemeine theoretische Prinzipien eingeschränkt werden. Die Eichinvarianz erweist sich als einschränkend für die Struktur der Amplitude, jedoch nicht für das Verhalten des Wirkungsquerschnitts, denn wenn wir die Formfaktoren A und B im Fall 1 und die sechs Formfaktoren des Zwei-Photonen-Vertex in den Fällen 1 und 2 frei wählen, können wir offensichtlich beliebige funktionale Formen des Wirkungsquerschnitts erhalten. In einer vollständigen Theorie müßte man diese Formfaktoren natürlich berechnen können, und man wird hier Beiträge von höheren Näherungen der QED, starker und schwacher Wechselwirkung ebenso erwarten wie von möglichen fundamentalen Abänderungen.

Wir möchten hier noch einige Bemerkungen zum Vergleich von Paarerzeugungsexperimenten mit der Theorie anfügen. In der Arbeit von Kroll [28] wird abschließend kurz ein ähnlicher wesentlicher Ein-Photon-Vertex diskutiert wie hier in (50). Unserem Faktor $\frac{b^2}{2m}$ entspricht bei Kroll $\frac{g(k^2)}{\Lambda^2}$, unser Faktor a wäre gleich 0 zu setzen. Dabei ist $g(k^2)$ ein dimensionsloser Formfaktor, der jedoch nur als abhängig betrachtet wird vom Impulsübertrag k^2 auf den Kern, in dessen Feld das Paar erzeugt wird. Im Fall symmetrischer Paarerzeugung ist $k^2 \approx 0$ und Kroll setzt $g(0) = 1$. Λ ist ein Parameter mit der Dimension eines Impulses. Kroll erhält dann für das Verhältnis $R = \frac{\sigma}{\sigma_{0,10}}$ des abgeänderten Wirkungsquerschnitts für symmetrische Paarerzeugung zu dem der QED Korrekturterme der Ordnung $\left(\frac{Q_F}{\Lambda}\right)^4$

1) Für Paarerzeugung in Seitwärtsrichtung ($\theta = \frac{\pi}{2}$) ist $x = x'$ (s.S.46). Man erhält den Wirkungsquerschnitt mit Formfaktor, indem man in unseren Formeln $\frac{b^2}{2m}$ und $\frac{a^2}{2m}$ aus (50) durch $A(0, x, x)$ und $B(0, x, x) = C(0, x, x)$ ersetzt. Durch Vergleich mit Experimenten wie in (60) erhält man dann obere Schranken für die Formfaktoren bei diesem Winkel und der experimentellen Energie [7, 41]. Dabei sind aber die Formfaktoren des "wesentlichen" Zwei-Photonen-Vertex weggelassen.

und $\left(\frac{Q_F}{\Lambda}\right)^6$ wobei Q_F die Masse des virtuellen Fermions ist. Dem entspricht in dieser Arbeit bei der Paarvernichtung im Schwerpunktssystem das Hochenergieverhalten der Terme proportional $b^2 y^4$ und $b^4 y^8$ relativ zum QED-Term.¹⁾ Daher wird bei neueren Paarvernichtungsexperimenten [42, 43, 44, 45] das gemessene Verhältnis $R_{\text{exp}} = \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_{\text{QED}}}$ parametrisiert mit

$$(65) \quad R_{\text{exp}} = A \left[1 \pm \left(\frac{Q_F}{\Lambda} \right)^4 \right],$$

im Gegensatz zu einem Term $\pm \left(\frac{Q_F}{\Lambda} \right)^2$ der aus der nicht eichinvarianten Abänderung (3) folgen würde. Aus dem Experiment erhält man eine untere Grenze für Λ und schließt auf die Gültigkeit der QED bis zu "extrem kleinen" Distanzen $> \Lambda^{-1}$

[43]. R_{exp} kann aber auch durch die dimensionslose Kopplungskonstante b parametrisiert werden, und von kleinen Abständen ist hier keine Rede. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der "wesentliche" Ein-Photon-Vertex additiv zu dem gewöhnlichen Vertexoperator $\delta\mu$ hinzutritt. Andere eichinvariante Abänderungen sind von dieser nicht unterscheidbar (s. Abschnitt 3.2). Dimensionsbehaftete Parameter werden erst nahegelegt, wenn man die Formfaktoren der "wesentlichen" Vertizes berücksichtigt, die explizit von den virtuellen Impulsen abhängen.

Weiterhin wird behauptet, Kroll habe gezeigt, daß die relative Abweichung von R_{exp} von 1 wenigstens mit $\left(\frac{Q_F}{\Lambda}\right)^4$ ansteigen müsse [42, 43, 45]³⁾. Dies ist nicht im Sinne der Kroll'schen Arbeit, in der keine Abhängigkeit des Formfaktors vom virtuellen Impuls des Fermions betrachtet wurde. Eine geeignete solche Abhängigkeit kann auch einen Gang von R mit irgendeiner anderen positiven oder negativen Potenz von $\left(\frac{Q_F}{\Lambda}\right)$ bewirken. Die Formel (65) ist nur eine phänomenologische Parametrisierung, die zum Vergleich verschiedener Hochenergie-Experimente mit virtuellen Fermionen verwendbar ist.²⁾ Vergleiche mit anderen Experimenten sind nicht schlüssig, da bei Prozessen ohne virtuelle Fermionen andersartige Abänderungen möglich sind, bei der

1) siehe Anhang 3.1

2) siehe hierzu auch die Diskussion in [9], S. 449.

3) siehe auch 45a, S.76.

Beschreibung von Niederenergie-Experimenten jedoch über virtuelle Impulse integriert wird, und daher spezielle Modelle gemacht werden müssen [46] .

5. Zusammenfassung

Im Rahmen des allgemeinen Problems, Aussagen über die Gültigkeit der Prinzipien der lokalen Quantenfeldtheorie durch Vergleich mit Experimenten zu gewinnen, betrachten wir die Eichinvarianz in der Quantenelektrodynamik. In einer beliebig abgeänderten Lorentz-invarianten Quantenelektrodynamik untersuchen wir die Konsequenzen der Eichinvarianz zweiter Art für Prozesse mit zwei äußeren Elektronen und zwei äußeren Photonen. Mit Hilfe eines Formalismus von Kroll kann die Amplitude durch den Elektronenpropagator S_0 und "wesentliche" (intrinsic) Ein- und Zwei-Photonen-Vertizes W_1, W_2 beschrieben werden. Es wird gezeigt, daß diese Beschreibung nicht eindeutig ist; es gibt eine Schar von Propagatoren und Vertizes, welche die gleiche Amplitude liefern. Unter der Voraussetzung, daß auch in der abgeänderten Theorie das Elektron durch einen einfachen Pol des Propagators an der Stelle $p^2 = -m^2$ beschrieben wird, befinden sich in dieser Schar erstens Sätze S_0, W_1, W_2 , bei denen der Propagator nicht abgeändert ist, zweitens auch solche, bei denen die Vertizes keine "Off-Shell"-Terme enthalten, also Terme, die verschwinden, wenn die jeweiligen Impulsvariablen auf der Massenschale sind (z.B. $q^2 = -m^2, p^2 = -m^2, k^2 = 0$). Es ist daher nicht möglich, durch das Experiment zwischen diesen verschiedenen Abänderungen der Quantenelektrodynamik zu entscheiden.

Die Auswirkungen der "wesentlichen" Vertizes auf die Wirkungsquerschnitte für Compton-Streuung und Paarvernichtung werden anhand von Beispielen illustriert. Bei diesen Rechnungen wird von den möglichen Formfaktoren nur das konstante Glied einer Taylor-Entwicklung berücksichtigt. Da dann die "wesentlichen" Vertizes zusätzlichen, nicht renormierbaren Wechselwirkungen entsprechen, ergeben sich mit der Energie stark ansteigende

Wirkungsquerschnitte, wie sie ähnlich von Kroll für die Paarerzeugung angegeben wurden. Jedoch läßt die von Kroll nicht betrachtete mögliche Abhängigkeit der Formfaktoren von den virtuellen Impulsen weitgehende Freiheit für verschiedenes Verhalten des Wirkungsquerschnitts. Ein Schluß von der Eichinvarianz auf eine spezielle Gestalt des Wirkungsquerschnitts, an der die Gültigkeit der Eichinvarianz experimentell geprüft werden könnte, ist nicht möglich. Abschließend wird auf Mehrdeutigkeiten bei der Interpretation verschiedener Abänderungen der Quantenelektrodynamik hingewiesen.

Anhang 1: Spuren

Durch Bildung des Absolutquadrats der Amplituden (51), (54) und Summation und Mittelung über Spins und Polarisationen erhalten wir folgende Ausdrücke ($x = -qk = p \cdot l$, $x' = ql = -pk$):

a) 1. Term (QED), quadratisch

$$T_{11} = \frac{1}{16x^2} A_{11} + \frac{1}{16x'^2} A_{11}(k, \mu \leftrightarrow l, \nu) - \frac{1}{16xx'} (B_{11} + B_{11}(k, \mu \leftrightarrow l, \nu))$$

$$A_{11} = \text{sp} \left\{ \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m - i\cancel{q}}{2m} \gamma_\mu (i(q+k) - m) \gamma_\nu \frac{m - i\cancel{p}}{2m} \right\}$$

$$= \frac{2}{m^2} (xx' + m^2x + m^4)$$

$$B_{11} = \text{sp} \left\{ \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m - i\cancel{q}}{2m} \gamma_\nu (i(q+k) - m) \gamma_\mu \frac{m - i\cancel{p}}{2m} \right\}$$

$$= \frac{1}{m^2} (-m^2(x' - x) + 2m^4)$$

Der Vertauschung ($k, \mu \leftrightarrow l, \nu$) entspricht dann ($x \leftrightarrow -x'$).

b) 1. Term (QED) und 2. Term (prop. a) gemischt.

$$T_{12} = \frac{a}{16m} \left\{ \frac{1}{x^2} A_{12} + \frac{1}{x'^2} A_{12}(k, \mu \leftrightarrow l, \nu) - \frac{1}{xx'} (B_{12} + B_{12}(k, \mu \leftrightarrow l, \nu)) \right\}$$

$$A_{12} = \text{sp} \left\{ \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m - i\cancel{q}}{2m} (\gamma_\nu \cancel{k} q_\mu + \gamma_\mu \cancel{k} \gamma_\nu \cancel{k} + \gamma_\mu \cancel{k} p_\nu) \frac{m - i\cancel{p}}{2m} \right\}$$

$$= \frac{1}{m} (-20x^2 + 4x'x)$$

$$B_{12} = \text{sp} \left\{ \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m - i\cancel{q}}{2m} (\gamma_\mu \cancel{k} q_\nu + \gamma_\nu \cancel{k} \gamma_\mu \cancel{k} + \gamma_\nu \cancel{k} p_\mu) \frac{m - i\cancel{p}}{2m} \right\}$$

$$= \frac{1}{m} (-4x^2 - 12x'x)$$

$$T_{21} = T_{12}^* = T_{12}$$

c) 2. Term (prop. a) quadratisch

$$\begin{aligned}
 T_{22} &= \frac{\alpha^2}{16m^2} \left\{ \frac{1}{x^2} A_{22} + \frac{1}{x'^2} A_{22}(k, \mu \leftrightarrow l, \nu) - \frac{1}{x'x} (B_{22} + B_{22}(k, \mu \leftrightarrow l, \nu)) \right\} \\
 A_{22} &= \gamma \mu \left\{ (x \gamma^\nu q^\mu + x \gamma^\nu k \gamma^\mu + k \gamma^\mu p^\nu) \frac{m-iq}{2m} (\gamma_\nu x q_\mu + \gamma_\mu k \gamma_\nu x + \gamma_\mu k p_\nu) \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= 16 \frac{x^3}{m^2} - 20 x^2 + 8 x' x \\
 B_{22} &= \gamma \mu \left\{ (x \gamma^\nu q^\mu + x \gamma^\nu k \gamma^\mu + k \gamma^\mu p^\nu) \frac{m-iq}{2m} (\gamma_\nu k q_\mu + \gamma_\nu x \gamma_\mu k + \gamma_\mu k p_\nu) \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= 4 \frac{x' x}{m^2} (x' - x) - 16 x' x + 2 (x'^2 + x^2)
 \end{aligned}$$

d) 1. Term (QED) + 3. und 4. Term gemischt (Fall 1 und 2)

$$\begin{aligned}
 &\gamma \mu \left\{ \frac{1}{-2x} \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m-iq}{2m} \gamma_\mu k \gamma_\nu x \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= 2m \left(\frac{4}{m^2} x - \frac{2}{m^2} x' - 1 + \frac{x'}{x} \right) \\
 &\gamma \mu \left\{ \frac{1}{-2x} \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m-iq}{2m} \gamma_\nu x \gamma_\mu k \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= 2m \left(4 \frac{x'}{m^2} - 2 \frac{x}{m^2} - 1 + \frac{x'}{x} \right) \\
 &\gamma \mu \left\{ \frac{1}{-2x} \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m-iq}{2m} \gamma_\mu k i q \gamma_\nu x \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= 2m^2 \left(4 \frac{x^2}{m^4} - 2 \frac{x}{m^2} + 2 \frac{x'}{m^2} + \frac{x'}{x} + 1 \right) \\
 &\gamma \mu \left\{ \frac{1}{-2x} \gamma^\nu (i(q+k) - m) \gamma^\mu \frac{m-iq}{2m} \gamma_\nu x i q \gamma_\mu k \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= 2m^2 \left(2 \frac{x'^2}{m^2 x} - 2 \frac{x'}{m^2} + \frac{x'}{x} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

e) 2. Term (prop. a) und 4. Term gemischt (Fall 1 und 2)

$$\begin{aligned}
 &\gamma \mu \left\{ x \gamma^\nu k \gamma^\mu \frac{m-iq}{2m} \frac{\alpha}{2mx} (\gamma_\nu x q_\mu + \gamma_\mu k \gamma_\nu x + \gamma_\mu k p_\nu) \frac{m-ip}{2m} \right\} \\
 &= \frac{\alpha}{m} \left\{ 4 (x' - x) - 4 \frac{x' x}{m^2} + 8 \frac{x^2}{m^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \frac{m-i\epsilon}{2m} \frac{-a}{2mx'} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \gamma_\mu) \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= -\frac{a}{m} \left\{ 4 \frac{x'x}{m^2} + 4 \frac{x}{x'} (x'-x) + 4 \frac{(x'-x)^2}{x'^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \frac{m-i\epsilon}{2m} \frac{a}{2mx} (\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\rho) \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= a \left\{ -4 \frac{x^2}{m^2} + 8 \frac{x'x}{m^2} + 4 (x'-x) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \frac{m-i\epsilon}{2m} \frac{-a}{2mx'} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \gamma_\rho) \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= -a \left\{ 4 \frac{x}{x'} (x'-x) + 4 \frac{x^2}{m^2} \right\} \end{aligned}$$

f) 3. und 4. Term quadriert (Fall 1 und 2)

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \frac{m-i\epsilon}{2m} \gamma_\mu \gamma_\nu \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= -16 \frac{x^2}{m^2} (x'-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \frac{m-i\epsilon}{2m} \gamma_\nu \gamma_\mu \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= 16 \frac{x'x}{m^2} (x'-x) + 8 (x'-x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \frac{m-i\epsilon}{2m} \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= 32 \frac{x'x^3}{m^2} + 16 x^2 (x'-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \frac{m-i\epsilon}{2m} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \frac{m-i\epsilon}{2m} \right\} \\ &= 16 x'x (x'-x) + 8 m^2 (x'-x)^2 \end{aligned}$$

Die übrigen Spuren ergeben sich durch die Vertauschung $(k, \mu \leftrightarrow l, \nu)$ oder verschwinden, da sie eine ungerade Zahl von γ^5 -Matrizen enthalten.

Mit Hilfe aller dieser Spuren erhält man die quadrierten Amplituden (56), (57).

Anhang 2: Wirkungsquerschnitte für Compton-Streuung

A 2.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt.

Wir betrachten die Compton-Streuung für den Fall, in dem das einlaufende Elektron ruht und nur das auslaufende Photon nachgewiesen wird. Der Wirkungsquerschnitt lautet dann (siehe z.B. [10])

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 m^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 T(x, x')$$

Mit $\omega = \frac{h\nu}{m}$ (Energie des einfallenden Photons), $\omega' = \frac{h\nu'}{m}$, $x = \frac{\omega}{m}$, $x' = \frac{\omega'}{m}$, $r_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m}$ (klassischer Elektronenradius) und der kinematischen Beziehung (θ Ablenkwinkel des Photons):

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + x(1 - \cos\theta)}$$

erhält man aus den quadrierten Amplituden (56), (57) die differentiellen Wirkungsquerschnitte ($d\Omega$ Raumwinkel-element des auslaufenden Photons):

$$\text{Fall 1: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{1 + \cos^2\theta}{[1 + x(1 - \cos\theta)]^2}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{r_0^2}{2} \frac{x^2}{[1 + x(1 - \cos\theta)]^3} \left\{ (1 - \cos\theta)^2 + 2a(1 - \cos\theta)^2 \right. \\ &+ a^2 \left[4(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)^2 \right] + 2ab(1 - \cos\theta)^2 \\ &+ b^2 \left[2 \frac{1 + \cos^2\theta}{1 + x(1 - \cos\theta)} + x(1 - \cos\theta) \frac{2(1 - \cos\theta) + x(1 - \cos^2\theta)}{1 + x(1 - \cos\theta)} \right] \\ &+ a^3 \left[4(1 - \cos\theta) - (1 - \cos\theta)^2 \right] - 4a^2b \frac{x^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + x(1 - \cos\theta)} \\ &- ab^2 \frac{x^2(1 - \cos\theta)^3}{1 + x(1 - \cos\theta)} + \frac{1}{2} a^4 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) \\ &- \frac{1}{2} a^3 b \frac{x^2(1 - \cos\theta)^2(3 + \cos\theta)}{1 + x(1 - \cos\theta)} + a^2 b^2 \left[\frac{x^2(1 - \cos\theta)(2 - \cos\theta)}{1 + x(1 - \cos\theta)} + \frac{2x^4(1 - \cos\theta)^3}{[1 + x(1 - \cos\theta)]^2} \right] \\ &\left. + 2ab^3 \left[\frac{x^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + x(1 - \cos\theta)} + \frac{x^4(1 - \cos\theta)^3}{[1 + x(1 - \cos\theta)]^2} \right] + b^4 x^2 \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{[1 + x(1 - \cos\theta)]^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Fall 2: Statt der Terme, die einen Vorfaktor mit b haben, treten die folgenden auf:

$$\frac{\tau_0^2}{2} \frac{y^2}{[1+y(1-\cos\theta)]^2} \left\{ -4c(1-\cos\theta)^2 \right. \\ - 8ac \frac{y^2(1-\cos\theta)^2}{1+y(1-\cos\theta)} \\ + a^2c \frac{y^2(1-\cos\theta)^2(3+\cos\theta)}{1+y(1-\cos\theta)} \\ \left. + 8c^2 \frac{y^2(1-\cos\theta)^2}{[1+y(1-\cos\theta)]^2} [1+y(1+y)(1-\cos\theta)] \right\}$$

Hochenergienäherung (für $y \gg 1$ und nicht zu kleine Winkel,

$\theta^2 \gg \frac{2}{y}$):

$$\text{Fall 1: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\tau_0^2}{2} \frac{1}{y(1-\cos\theta)} \left\{ 1 + 2a + a^2 \left(\frac{4}{1-\cos\theta} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ + 2ab + b^2 \left[y \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{2(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^2} \right] + a^3 \left(\frac{4}{1-\cos\theta} - 1 \right) \\ - 4a^2b \frac{y}{1-\cos\theta} - ab^2 y + \frac{1}{2} a^4 \left[\frac{1}{(1-\cos\theta)^2} + \frac{1}{2} \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right] \\ - \frac{1}{2} a^3b y \frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta} + 2a^2b^2 \frac{y^2}{1-\cos\theta} \\ \left. + 2ab^3 \frac{y^2}{1-\cos\theta} + b^4 \frac{y^2}{(1-\cos\theta)^2} \right\}$$

Fall 2: statt der b-Terme:

$$\frac{\tau_0^2}{2} \frac{1}{y(1-\cos\theta)} \left\{ -4c - 8ac \frac{y}{1-\cos\theta} \right. \\ \left. + a^2c y \frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta} + 8c^2 \frac{y^2}{1-\cos\theta} \right\}$$

A 2.2 Totaler Wirkungsquerschnitt.

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte lassen sich elementar integrieren:

Fall 1:

$$\begin{aligned}
 \sigma = r_0^2 \pi \bigg\{ & \frac{y^2 - 2y - 2}{y^3} \ln(1+2y) + \frac{4}{y^2} + \frac{2(1+y)}{(1+2y)^2} \\
 & + a \left[\frac{2}{y} \ln(1+2y) - \frac{4(1+3y)}{(1+2y)^2} \right] \\
 & + a^2 \left[\frac{1}{2y} \ln(1+2y) - \frac{1+3y-8y^2}{(1+2y)^2} \right] \\
 & + ab \left[\frac{2}{y} \ln(1+2y) - \frac{4(1+3y)}{(1+2y)^2} \right] \\
 & + b^2 \left[\left(\frac{2}{y} - 1 \right) \ln(1+2y) - \frac{2}{3} \frac{6+15y-9y^2-16y^3}{(1+2y)^2} \right] \\
 & + a^3 \left[-\frac{1}{y} \ln(1+2y) + 2 \frac{1+3y+4y^2}{(1+2y)^2} \right] \\
 & - \frac{32}{3} a^2 b \frac{y^4}{(1+2y)^2} \\
 & + ab^2 \left[-\ln(1+2y) + \frac{2}{3} y \frac{3+15y+22y^2}{(1+2y)^3} \right] \\
 & + a^4 \left[-\frac{1}{4y} \ln(1+2y) + \frac{1}{2} \frac{1+3y+4y^2+2y^3}{(1+2y)^2} \right] \\
 & + a^3 b \left[\frac{1}{2} \ln(1+2y) - \frac{1}{3} y \frac{3+15y+22y^2+16y^3}{(1+2y)^3} \right] \\
 & + \frac{2}{3} a^2 b^2 y^4 \frac{7+16y+16y^2}{(1+2y)^4} \\
 & + \frac{8}{3} ab^3 y^4 \frac{2+4y+3y^2}{(1+2y)^4} \\
 & + \frac{4}{3} b^4 y^4 \frac{2+8y+14y^2+9y^3}{(1+2y)^4} \bigg\}
 \end{aligned}$$

Fall 2: statt der b-Terme:

$$\begin{aligned} & \tau_0^2 \pi \left\{ -2c \left[\frac{2}{y} \ln(1+2y) - 4 \frac{1+3y}{(1+2y)^2} \right] \right. \\ & \quad - \frac{64}{3} a c \frac{y^4}{(1+2y)^3} \\ & \quad + 2a^2 c \left[-\frac{1}{2} \ln(1+2y) + \frac{1}{3} y \frac{3+15y+22y^2+16y^3}{(1+2y)^3} \right] \\ & \quad \left. + \frac{32}{3} c^2 y^4 \frac{2+4y+3y^2}{(1+2y)^4} \right\} \end{aligned}$$

Hochenergienäherung ($y \gg 1$)

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \sigma = \tau_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{y} (\ln 2y + \frac{1}{2}) + 2a \frac{1}{y} (\ln 2y - \frac{3}{2}) + 2a^2 \right. \\ + 2ab \frac{1}{y} (\ln 2y - \frac{3}{2}) + \frac{8}{3} b^2 y + 2a^3 - \frac{4}{3} a^2 b y \\ - ab^2 \ln 2y + \frac{1}{4} a^4 y - \frac{2}{3} a^3 b y + \frac{2}{3} a^2 b^2 y^2 \\ \left. + \frac{1}{2} a b^3 y^2 + \frac{3}{4} b^4 y^3 \right\} \end{aligned}$$

Fall 2: Statt der b-Terme:

$$\tau_0^2 \pi \left\{ -4c \frac{1}{y} (\ln 2y - \frac{3}{2}) - \frac{8}{3} a c y + \frac{4}{3} a^2 c y + 2c^2 y^2 \right\}$$

Die zu a , a^2 , a^3 und a^4 proportionalen Terme stimmen mit dem Ergebnis von Powell [32] überein.

Man überzeugt sich leicht, daß der Wirkungsquerschnitt das richtige Niederenergieverhalten zeigt.

Anhang 3: Wirkungsquerschnitte für Paarvernichtung in zwei Quanten

A 3.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem.

Wir betrachten Paarvernichtung in zwei Quanten mit gegenläufigen Strahlen, d.h. im Schwerpunktsystem. Die beiden auslaufenden Photonen haben gleiche Energien und fliegen in entgegengesetzte Richtungen. Die quadrierte Amplitude erhält man aus der für die Compton-Streuung mit Hilfe der Substitutionsregel (siehe z.B. [10]). Wir haben

die Ersetzung $(p \rightarrow -p, k \rightarrow -k, u(p) \rightarrow v(p))$ durchzuführen. Nach Ausführung der Spinsummen führt dies zu einem Minuszeichen wegen des Verhaltens der Projektionsoperatoren:

$$\Lambda_-(p) \rightarrow -\Lambda_+(p) = -\Lambda_-(-p)$$

Damit erhalten wir den Wirkungsquerschnitt (Ω , Raumwinkel des Photons 1):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{m^2}{4\gamma^2\beta} \{-T(-x, x')\}$$

Dabei ist $E = m\gamma$ die Energie, $\beta = \frac{v}{c}$ die Geschwindigkeit des einfallenden Elektrons bzw. Positrons, $r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}$ der klassische Elektronenradius. Ist θ_1 der Streuwinkel des Photons 1, θ_2 der des Photons 2 in Bezug auf die Einfallrichtung des Elektrons, so gilt

$$x = E^2(1 - \beta \cos \theta_2) = E^2(1 + \beta \cos \theta_1)$$

$$x' = E^2(1 - \beta \cos \theta_1)$$

Im folgenden betrachten wir stets das Photon 1 und lassen die Indizes von θ und Ω weg. Mit den quadrierten Amplituden (56), (57) erhalten wir die differentiellen Wirkungsquerschnitte:

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{r_0^2}{4} \frac{1}{\gamma^2\beta} \left\{ \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} [1 + 2\beta^2 \sin^2 \theta - \beta^4 (1 + \sin^4 \theta)] \right. \\ &\quad + 4a \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\ &\quad + a^2 \left[4\gamma^2 + \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\ &\quad + 4ab \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \\ &\quad + 2b^2 \left[-\gamma^4 (1 + \beta^2 \cos^2 \theta) + 2\gamma^2 \frac{\beta^2 \cos^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} + \frac{2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\ &\quad + 2a^3 \left[2\gamma^2 - \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\ &\quad \left. + 8a^2 b \gamma^4 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 4ab^2 \frac{\gamma^2}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \\
 &+ \frac{1}{4} a^4 \left[\gamma^4 (1-\beta^2 \cos^2 \theta) + 2\gamma^2 - \frac{2}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\
 &+ 2a^3 b \left[2\gamma^4 - \frac{\gamma^2}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \right] \\
 &+ a^2 b^2 \left[\gamma^6 (7+\beta^2 \cos^2 \theta) - 2\gamma^4 \right] \\
 &+ 4ab^3 [2\gamma^6 - \gamma^4] \\
 &+ b^4 \left[\gamma^8 (1-\beta^4 \cos^4 \theta) + 2\gamma^6 (1-\beta^2 \cos^2 \theta) - 2\gamma^4 \right] \}
 \end{aligned}$$

Fall 2: statt der Terme mit b:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_0^2}{4} \frac{1}{\gamma^2 \beta} \left\{ -8c \frac{1}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \right. \\
 \left. + 16ac \gamma^4 \right. \\
 \left. - 4a^2 c \left[2\gamma^4 - \frac{\gamma^2}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \right] \right. \\
 \left. - 16c^2 [2\gamma^6 - \gamma^4] \right\}
 \end{aligned}$$

Hochenergienäherung (für $\gamma \gg 1, \theta^2 \gg \frac{2}{\gamma^2}$)

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\tau_0^2}{4} \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{2-\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 4a \frac{1}{\sin^2 \theta} + 4a^2 \gamma^2 \right. \\
 + 4ab \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2b^2 \gamma^4 (1+\cos^2 \theta) + 4a^3 \gamma^2 + 8a^2 b \gamma^4 \\
 + 4ab^2 \frac{\gamma^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4} a^4 \gamma^4 \sin^2 \theta + 4a^3 b \gamma^4 \\
 \left. + a^2 b^2 \gamma^6 (7+\cos^2 \theta) + 8ab^3 \gamma^6 + b^4 \gamma^8 (1-\cos^4 \theta) \right\}
 \end{aligned}$$

Fall 2: statt der b-Terme:

$$\frac{\tau_0^2}{4} \frac{1}{\gamma^2} \left\{ -8c \frac{1}{\sin^2 \theta} + 16ac \gamma^4 - 8a^2 c \gamma^4 + 32c^2 \gamma^6 \right\}$$

Für die in Abschnitt 4.3 ermittelten Werte (bzw. oberen Grenzen) für die Konstanten und für hohe Energien sind die Terme proportional b^4 (bzw. c^2) die größten. Vernachlässigt man alle anderen bis auf den ersten (OED), so erhält man in Seitwärtsrichtung die Ausdrücke (62); (63).

Auch hier haben die differentiellen Wirkungsquerschnitte das richtige Niederenergieverhalten, nämlich alle Terme werden isotrop und divergieren mit $\frac{1}{\beta}$.

A 3.2 Totaler Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem.

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte lassen sich wiederum elementar integrieren. Wegen der Identität der beiden Photonen im Endzustand ist ein Faktor $1/2$ anzubringen.

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \sigma_{CM} = & \tau_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{2\gamma^2 \beta^2} \left[\left(\gamma^4 + \gamma^2 - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \gamma^2 \beta (1+\gamma^2) \right] \right. \\ & + a \frac{1}{\gamma^2 \beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ & + \frac{1}{4} a^2 \left[8 \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \\ & + ab \frac{1}{\gamma^2 \beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ & + \frac{1}{2} b^2 \left[2 \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2 - 1} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{\beta} \frac{2}{3} (5 + 4\gamma^2) \right] \\ & + \frac{1}{2} a^3 \left[4 \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \\ & + 4a^2 b \frac{\gamma^2}{\beta} \\ & + ab^2 \frac{1}{\beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ & + \frac{1}{8} a^4 \left[\frac{1}{3} \frac{1}{\beta} (7 + 2\gamma^2) - \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \\ & \left. + \frac{1}{2} a^3 b \left[4 \frac{\gamma^2}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6} a^2 b^2 \frac{\gamma^2}{\beta} [22\gamma^2 + 7] \\
 & + 2ab^3 \frac{\gamma^2}{\beta} [2\gamma^2 - 1] \\
 & + \frac{1}{30} b^4 \frac{\gamma^2}{\beta} [12\gamma^4 + 26\gamma^2 - 23] \}
 \end{aligned}$$

Fall 2: statt der b-Terme:

$$\begin{aligned}
 \tau_0^2 \pi \left\{ -2c \frac{1}{\gamma^2 \beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + 8ac \frac{\gamma^2}{\beta} \right. \\
 \left. - ac^2 \left[4 \frac{\gamma^2}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] + 8c^2 \frac{\gamma^2}{\beta} [2\gamma^2 - 1] \right\}
 \end{aligned}$$

Hochenergienäherung

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1} \quad \sigma_{CM} = \tau_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \left[\ln 2\gamma^2 - \frac{1}{2} \right] + 2a \frac{1}{\gamma^2} \ln 2\gamma^2 + 2a^2 \right. \\
 + 2ab \frac{1}{\gamma^2} \ln 2\gamma^2 - \frac{4}{3} b^2 \gamma^2 + 2a^3 + 4a^2 b \gamma^2 \\
 + 2ab^2 \ln 2\gamma^2 + \frac{1}{12} a^4 \gamma^2 + 2a^3 b \gamma^2 \\
 \left. + \frac{11}{3} a^2 b^2 \gamma^4 + 4ab^3 \gamma^4 + \frac{2}{5} b^4 \gamma^6 \right\}
 \end{aligned}$$

Fall 2: statt der b-Terme

$$\tau_0^2 \pi \left\{ -4c \frac{1}{\gamma^2} \ln 2\gamma^2 + 8ac \gamma^2 - 4a^2 c \gamma^2 + 16c^2 \gamma^4 \right\}$$

A 3.3 Umrechnung in das Ruhssystem des Elektrons.

Im Schwerpunktsystem bewegen sich Positron und Elektron mit den Geschwindigkeiten β_1 und $\beta_2 = -\beta_1$. Das Ruhssystem des Elektrons ($\beta_2' = 0$) bewegt sich relativ zum Schwerpunktsystem mit der Geschwindigkeit $\beta = \beta_2 = -\beta_1$. Der Impuls des Positrons $\beta_1 \gamma_1$ transformiert sich wie ein Dreiervektor ($\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$):

$$\beta_1' \gamma_1' = \gamma (\beta_1 \gamma_1 - \beta \gamma_1) = 2\beta_1 \gamma_1^2,$$

die Energie wie die vierte Komponente eines Vierervektors:

$$\gamma_1' = \gamma (\gamma_1 + \beta \beta_1 \gamma_1) = \gamma_1^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 = 2\gamma_1^2 - 1$$

Damit haben wir

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1' + 1}{2}}$$

$$\beta_1 \gamma_1 = \sqrt{\frac{\beta_1' \gamma_1' - 1}{2}}$$

und der totale Wirkungsquerschnitt lautet im Ruhssystem des Elektrons (wir schreiben wieder β, γ statt β', γ'):

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \sigma_{RS} = r_0^2 \pi & \left\{ \frac{1}{\beta^2 \gamma^2 (1+\gamma)} \left[(\gamma^2 + 4\gamma + 1) \ln \gamma(1+\beta) - \beta \gamma (\gamma^2 + 3) \right] \right. \\ & + 2a \frac{1}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \\ & + \frac{1}{2} a^2 \left[4 \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \right] \\ & + 2ab \frac{1}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \\ & + b^2 \left[\frac{\gamma+3}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (2\gamma+7) \right] \\ & + a^3 \left[2 \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \frac{1}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \right] \\ & + 2a^2 b (\gamma+1) \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \\ & + ab^2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \\ & + \frac{1}{8} a^4 \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (\gamma+8) - \frac{2}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \right] \\ & + \frac{1}{2} a^3 b \left[2(\gamma+1) \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \ln \gamma(1+\beta) \right] \\ & + \frac{1}{12} a^2 b^2 \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (11\gamma^2 + 15\gamma + 4) \\ & + ab^3 \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \gamma (\gamma+1) \\ & \left. + \frac{1}{60} b^4 \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (3\gamma^3 + 22\gamma^2 + 12\gamma - 7) \right\} \end{aligned}$$

Fall 2: statt der b-Terme:

$$r_0^2 \pi \left\{ -4c \frac{1}{y-1} \ln y(1+\beta) + 4ac \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} (y+1) - a^2 c \left[2(y+1) \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} - \frac{y+1}{y-1} \ln y(1+\beta) + 4c^2 \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} y(y+1) \right] \right\}$$

Hochenergienäherung:

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \sigma_{RS} = r_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{y} [\ln 2y - 1] + 2a \frac{1}{y} \ln 2y + 2a^2 \right. \\ \left. + 2ab \frac{1}{y} \ln 2y - \frac{3}{2} b^2 y^2 + 2a^3 + 2a^2 b y \right. \\ \left. + ab^2 \ln 2y + \frac{1}{24} a^4 y + a^3 b y \right. \\ \left. + \frac{11}{12} a^2 b^2 y^2 + ab^3 y^2 + \frac{1}{20} b^4 y^3 \right\} \end{aligned}$$

Fall 2: statt der b-Terme:

$$r_0^2 \pi \left\{ -4c \frac{1}{y} \ln 2y + 4ac y - 2a^2 c y + 4c^2 y^2 \right\}$$

Diese Formeln wurden in Abschnitt 4.3 (60), (61) zur Bestimmung der oberen Grenzen für b bzw. c durch Vergleich mit dem Paarvernichtungsexperiment von Fabiani et al. [38] benutzt.

Anhang 4: Niederenergie-Experimente: Stand November 1970.

Zur Illustration unserer einleitenden Bemerkungen geben wir in Tabelle 2 einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Niederenergie-Experimente in der QED.

	Theorie	Experiment
Lamb-Shift		
des Wasserstoffs	$1057\ 91 \pm 0,16\ \text{MHz}\ [47-49]$	$1057,79 \pm 0,06\ \text{MHz}\ [50-52]$
$\frac{g-2}{2}$ Elektron	$(1159\ 643,5 \pm 2,3) \cdot 10^{-9}\ [53]$	$(1\ 159\ 644 \pm 7) \cdot 10^{-9}\ [37]$
$\frac{g-2}{2}$ Myon	$(116\ 586,8 \pm 2,5) \cdot 10^{-8}\ [53, 54, 35]$	$(116\ 616 \pm 31) \cdot 10^{-8}\ [55]$
Feinstruktur des		
Positroniums	$203\ 415,2 \pm 20\ \text{MHz}\ [56]$	$203\ 398 \pm 11\ \text{MHz}\ [57]$
Feinstruktur des		
Myoniums	$4463,27 \pm 0,06\ \text{MHz}\ [50]$	$4\ 463,26 \pm 0,04\ \text{MHz}\ [58]$
Hyperfeinstruktur		
des Wasserstoffs	$1\ 420\ 402,3 \pm 5,7\ \text{kHz}\ [50]$	$1\ 420\ 405\ 751,7864 \pm 0,0017\ \text{Hz}\ [59]$

Tab. 2

Die theoretischen Werte sind mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha^{-1} = 137,03608 \pm 0,00026$ berechnet [50]. In dem mittlerweile erschienenen umfassenden Bericht von Parker, Taylor und Langenberg [50] findet man eine Diskussion der experimentellen und theoretischen Werte und ihrer Fehler sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis nach dem Stand von Mitte 1969. Für den experimentellen Wert der Lamb-Shift wurde das ungewichtete Mittel der fünf Werte genommen, die in [47] angegeben sind. Die Verwendung des nach Reissner und Ryn (s. [52], Fußnote 16) korrigierten Wertes von Triebwaasser et al. würde einen Mittelwert von $1057,81 \pm 0,06\ \text{MHz}$ ergeben. Beim anomalen Moment des Myons ist der Beitrag der schwachen Wechselwirkung von $-2 \cdot 10^{-8}$ [34] nicht berücksichtigt. Der Fehler bei der Feinstruktur des Positroniums rührt von der Unkenntnis des α^6 -Terms her. Eine Abschätzung dieses Terms von Erickson (siehe [50], p. 454) ergibt den Wert $203\ 433,1 \pm 5,9\ \text{MHz}$.

6 Literaturverzeichnis

- [1] W. K. H. Panofsky, in Proceedings of the 14th International High Energy Conference, Vienna, 1968 (CERN Scientific Information Service, Genf, 1968), p. 23 ff.
- [2] S. C. C. Ting, ebenda, p. 43 ff.
- [3] D. I. Blochinzew, UFN 61, 137 (1957) und Fortschr. Phys. 6, 246 (1958)
- [4] D. A. Kirshnits, UFN 90, 129 (1966) und Sov. Phys. Uspekhi 9, 692 (1967)
- [5] H. Salecker, Z. Naturf. 8a, 16 (1953), 10a, 349 (1955)
- [6] S. D. Drell, Ann. Phys. (New York), 4, 75 (1958)
- [7] H. Salecker, Z. Phys. 160, 385 (1960).
- [8] Proceedings of the International Symposium on Electron and Positron Storage Rings, Saclay, 1966 (Presses Universitaires de France)
- [9] P. Marin, in Proceedings of the 1967 International Conference on Electron and Photon Interactions at High Energies, Stanford, Cal. (Clearinghouse for Scientific and Technical Information, Springfield, Va.) p. 367 ff.
- [10] J. M. Jauch, F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons (Addison-Wesley, Reading, Mass.)
- [11] R. P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939, 1430 (1948)
- [12] R. P. Feynman, Phys. Rev. 76, 796 (1949)
- [13] B. de Tollis, Nuovo Cim. 16, 203 (1960)
- [14] C. Bloch, Dan.Mat.Fys.Medd. 27, No. 8 (1952)
- [15] W. Pauli, F. Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949)
- [16] F. Bopp, Ann.d.Physik 38, 345 (1940), 42, 572 (1943)
- [16a] A. Pais, G. Uhlenbeck, Phys. Rev. 79, 145 (1950)
- [16b] S.N. Gupta, Proc.Phys.Soc. A66, 129 (1953)
- [17] T. D. Lee, G. C. Wick, Nucl. Phys. B 9, 209 (1969)
T. D. Lee, in Proceedings of the Topical Conference on Weak Interactions, CERN, 1969, p. 427 ff.
- [17a] H. Salecker, unveröffentlicht.

- [18] F. E. Low, Phys. Rev. Lett. 14, 238 (1965)
- [19] J. Ward, Phys. Rev. 77, 293 (1950), 78, 182 (1950)
- [20] Y. Takahashi, Nuovo Cim. 6, 371 (1957)
- [21] J. A. McClure, S. D. Drell, Nuovo Cim. 37, 1638 (1965)
- [22] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Vvedenie v teoriyu kvantovannykh polei (Gostekhizdat, Moskva, 1957), Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience Publishers, New York, 1959), p. 367 ff.
- [23] E. Kazes, Nuovo Cim. 13, 1226 (1959)
- [24] K. Nishijima, Phys. Rev. 119, 485 (1960)
- [25] N. P. Chang, H. S. Mani, Phys. Rev. 134, B 896 (1964)
- [26] R. J. Rivers, J. Math. Phys. 7, 385 (1966)
- [27] P. Breitenlohner, Preprint MPI München (1968)
- [28] N. M. Kroll, Nuovo Cim. 45, 65 (1966)
- [29] K. Ringhofer, Acta Physica Austriaca 31, 67(1970)
- [30] P. Breitenlohner, private Mitteilung
- [31] H. Fraas, Z. Phys. 200, 375 (1967)
- [32] J. L. Powell Phys. Rev. 75, 32 (1949)
- [33] S. J. Brodsky, J. D. Sullivan, Phys. Rev. 156, 1644 (1967)
- [34] T. Burnett, M. J. Levine, Phys. Lett. 24B, 467 (1967)
- [35] M. Gourdin E. de Rafael, Nucl. Phys. B10, 667 (1969)
- [36] W. A. Bardeen, W. K. Tung, Phys. Rev. 173, 1423 (1968)
- [37] J. C. Wesley, A. Rich, Phys. Rev. Lett. 24, 1320 (1970)
- [38] F. Fabiani, M. Fidecaro, G. Finocchiaro, G. Giacomelli D. Harting, N. H. Lipman, G. Torelli, Nuovo Cim. 25, 655 (1962)
- [39] Y. S. Tsai, Phys. Rev. 137, B 730 (1965)
- [40] J. Werle, Relativistic Theory of Reactions (North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966) p. 320 f.
- [41] S. Langenbuch, Diplomarbeit, München, 1969, unveröffentlicht.
- [42] J. G. Asbury, W. K. Bertram, U. Becker, P. Joos, M. Rohde, A. J. S. Smith, S. Friedlander, C. L. Jordan, S. C. C. Ting Phys. Rev. 161, 1344 (1967)

- [43] H. Alvensleben, U. Becker, W. K. Bertram, M. Binkley, K. Cohen, C. L. Jordan, T. M. Knasel, R. Marshall, D. J. Quinn, M. Rohde, G. H. Sanders, S. C. C. Ting, Phys. Rev. Lett. 21, 1501 (1968)
- [44] S. Hayes, R. Imlay, P. M. Joseph, A. S. Keizer, J. Knowles, P. C. Stein, Phys. Rev. Lett. 22, 1134 (1969)
- [45] P. L. Rothwell, R. C. Chase, D. R. Earles, M. Gettner, G. Glass, G. Lutz, E. v. Goeler, R. Weinstein, Phys. Rev. Lett. 23, 1521 (1969)
- [45a] F. J. M. Farley, in Proceedings of the Florence Inaugural Conference of the European Physical Society, Florence, Italy, 1969, Riv. Nuovo Cim., Numero Speciale, 59 (1969)
- [46] H. Salecker, Vorlesungen über Quantenelektrodynamik, Freiburg, 1957, unveröffentlichtes Manuskript.
- [47] T. Appelquist, S. J. Brodsky, Phys. Rev. Lett. 24, 562 (1970)
- [48] B. E. Lautrup, A. Petermann, E. de Rafael, Phys. Lett. 31B, 577 (1970)
- [49] R. Barbieri, J. A. Mignaco, E. Remiddi, Lett. Nuovo Cim. 3, 588 (1970)
- [50] B. N. Taylor, W. H. Parker, D. N. Langenberg, Rev. Mod. Phys. 41, 375 (1969)
- [51] B. L. Cosens, T. V. Vorburger, Phys. Rev. Lett. 23, 1273 (1969)
- [52] R. T. Robiscoe, T. W. Shyn, Phys. Rev. Lett. 24, 559 (1970)
- [53] J. Aldins, S. J. Brodsky, A. J. Dufner, T. Kinoshita, Phys. Rev. D1, 2378 (1970)
- [54] B. Lautrup, Phys. Lett. 32B, 627 (1970)
- [55] J. Bailey, W. Bartl, G. von Bochmann, R. C. A. Brown, F. J. M. Farley, H. Jöstlein, E. Picasso, R. W. Williams, Phys. Lett. 28B, 287 (1968)
- [56] T. Fulton, D. A. Cwen, W. W. Repko, Phys. Rev. Lett. 24, 1035 (1970)
25 782 (E) (1970)
- [57] V. W. Hughes, in F. Bopp, H. Kleinpoppen (eds.) Physics of the One-and Two-Electron Atoms (North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1969), p. 416.
- [58] P. A. Thompson, J. J. Amato, P. Crane, V. W. Hughes, R. M. Mobley, G. zu Putlitz, J. E. Rothberg, Phys. Rev. Lett. 22, 163 (1969)
- [59] R. Vessot, H. Peters, J. Vanier, R. Beehler, D. Halford, R. Harrach, D. Allan, D. Glase, C. Snider, J. Barnes, L. Citter, L. Bodily, IEEE Trans. Inst. Meas. IM-15, 165 (1966)

Lebenslauf:

Gerd Tomberger, geb. 24.2.1938 in Wien, Österreich.
Eltern: Dipl.-Ing. Alfred Tomberger, Anna Tomberger
geb. Carstens

Schulbesuch: 1944-1948 Volksschule an der Bahnstraße in
Leverkusen-Schlebusch.
1948-1957 Carl-Duisberg-Gymnasium in Leverkusen,
Abitur.

Studium: Physik, Mathematik,
1957-1961 an der Universität Bonn, Vordiplom im
Juli 1960.
1961-1965 an der Universität Freiburg, Diplomarbeit
bei Prof. Dr. O. Osberghaus, Thema: Aufbau eines
Elektronenstoß-Spektrometers für Energien ab 1eV,
Hauptdiplom im Mai 1965.

Seit Oktober 1965 Arbeit bei Prof. Dr. H. Salecker,
seit Oktober 1966 an der Universität München.

Berufliches: Oktober 1965 bis September 1966 wissenschaftlicher
Angestellter am Institut für Theoretische Physik
der Universität Freiburg, Oktober 1966 bis September
1967 wissenschaftliche Hilfskraft an der Sektion
Physik der Universität München, seit Oktober 1967
Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle.

Persönliches: Seit 1963 verheiratet, drei Kinder.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Salecker für die
Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche kritische
Bemerkungen, Herrn Dr. K. Ringhofer für eine unabhängige
Durchführung aller Rechnungen, und ihm sowie Herrn
Dipl.-Phys. J. Demuth für viele anregende und klärende
Diskussionen.

